

Devoir surveillé – Les modèles démographiques

Modèle de Malthus (suite géométrique), modèle logistique de Verhulst, ressources, prévisions de population mondiale et limites des modèles

Durée : 120 min – Sans document – Sur 20 points · Terminale

Nom : _____ Date : _____ Note : _____ / 20

Les réponses doivent être rédigées et justifiées. Soigne l'orthographe et la présentation.

Exercice 1 – Modèle de Malthus

(4 pts)

En 2025, une ville compte 27 500 habitants ; le taux de natalité vaut 12,4 ‰ et le taux de mortalité 9,2 ‰, les migrations étant négligeables. On note u_n la population en l'année 2025 + n .

a) Calculer le taux d'accroissement naturel et en déduire le coefficient multiplicateur annuel.

- a) Justifier la nature de la suite (u_n) et exprimer u_n en fonction de n .
- b) Estimer la population en 2045, arrondie à l'unité.
- c) Un journal écrit : « En 20 ans, la population augmentera de $20 \times 3,2 \text{ ‰} = 6,4 \text{ ‰}$. » Expliquer l'erreur et donner le pourcentage d'augmentation correct, au centième.

Exercice 2 – Population et ressources

(4 pts)

En 2020, une région compte 1,8 million d'habitants et sa population augmente de 2,6 % par an. Sa production alimentaire permet de nourrir 2,25 millions de personnes, et ce nombre augmente de 42 000 par an. On note u_n et v_n (en millions) la population et le nombre de personnes pouvant être nourries en 2020 + n .

a) Exprimer u_n et v_n en fonction de n .

- a) Calculer u_{10} et v_{10} au centième.
- b) Déterminer la première année où la production ne suffit plus.
- c) Expliquer le raisonnement de Malthus sur cette situation, puis donner deux raisons pour lesquelles la famine généralisée qu'il redoutait ne s'est pas produite à l'échelle mondiale.

Exercice 3 – Modèle de Verhulst

(4 pts)

Une population de lapins introduite dans un enclos évolue selon $u_{n+1} = u_n + 0,35 u_n \left(1 - \frac{u_n}{4800}\right)$, avec $u_0 = 600$ (n en années).

a) Interpréter les nombres 0,35 et 4 800.

- a) Calculer u_1 , arrondi à l'unité.
- b) Calculer l'accroissement annuel lorsque $u_n = 2400$, puis lorsque $u_n = 4500$. Commenter.
- c) Après un lâcher, l'effectif atteint 5 280. Un élève affirme que la population va continuer à croître. Le réfuter par un calcul.

Exercice 4 – Fonction logistique**(4 pts)**

Le nombre de bactéries d'une culture, en milliers, est modélisé par $Q(t) = \frac{250}{1+49e^{-0,8t}}$, où t est en heures.

a) Calculer $Q(0)$.

- a) Calculer $Q(5)$, arrondi au dixième.
- b) Montrer que $Q(t) < 250$ pour tout $t \geq 0$.
- c) Vers quelle valeur tend $Q(t)$ quand t devient grand ? Interpréter, puis expliquer pourquoi la croissance est presque exponentielle au début.

Exercice 5 – Confronter un modèle aux données**(4 pts)**

Population d'un pays (en millions) et prévisions d'un modèle de Malthus calé sur 1980 et 1990, avec le même coefficient multiplicateur à chaque décennie :

Année	1980	1990	2000	2010	2020
Population observée	14,2	17,0	19,8	22,1	24,3
Modèle	14,2	17,0	?	24,4	29,2

a) Vérifier que le modèle prévoit environ 20,4 millions en 2000.

- a) Calculer l'écart relatif du modèle en 2020, en pourcentage.
- b) Calculer le coefficient multiplicateur observé pour chaque décennie et décrire son évolution.
- c) Proposer un modèle plus adapté et deux facteurs démographiques pouvant expliquer l'écart.

Bon courage !