

Corrigé et barème – Les modèles démographiques

Modèle de Malthus (suite géométrique), modèle logistique de Verhulst, ressources, prévisions de population mondiale et limites des modèles

Durée : 120 min – Sans document – Sur 20 points · Terminale

Exercice 1 – Modèle de Malthus

(4 pts)

- a) $t = 12,4 - 9,2 = 3,2 \text{ ‰} = 0,0032$; coefficient $q = 1,0032$. (1)
- b) $u_{n+1} = u_n + 0,0032 u_n = 1,0032 u_n$: suite géométrique de raison 1,0032, donc $u_n = 27\,500 \times 1,0032^n$. (1)
- c) $n = 20 : u_{20} = 27\,500 \times 1,0032^{20} \approx 27\,500 \times 1,06598 \approx 29\,315$ habitants. (1)
- d) Les taux ne s'additionnent pas : les coefficients se multiplient. $1,0032^{20} \approx 1,0660$, soit une hausse de 6,60 ‰ (et non 6,4 ‰). (1)

Erreur fréquente — Sur plusieurs années, on multiplie les coefficients multiplicateurs : additionner les taux sous-estime une croissance exponentielle.

Exercice 2 – Population et ressources

(4 pts)

- a) $u_n = 1,8 \times 1,026^n$ (géométrique) ; $v_n = 2,25 + 0,042 n$ (arithmétique). (1)
- b) $u_{10} \approx 1,8 \times 1,29263 \approx 2,33$; $v_{10} = 2,25 + 0,42 = 2,67$. (1)
- c) $u_{22} \approx 3,166 < v_{22} = 3,174$; $u_{23} \approx 3,248 > v_{23} = 3,216$: pénurie à partir de 2043. (1)
- d) Une suite géométrique de raison supérieure à 1 dépasse toujours une suite arithmétique : pénurie inévitable dans le modèle. En réalité : hausse des rendements agricoles (révolution verte), baisse de la fécondité (transition démographique). (1)

Le point clé — L'argument de Malthus repose sur deux hypothèses (population exponentielle, ressources linéaires) : si l'une tombe, la conclusion tombe.

Exercice 3 – Modèle de Verhulst

(4 pts)

- a) 0,35 : taux de croissance annuel quand la population est petite ($\approx +35 \text{ ‰}$ par an) ; 4 800 : capacité d'accueil de l'enclos. (1)
- b) $u_1 = 600 + 0,35 \times 600 \times (1 - 0,125) = 600 + 183,75 \approx 784$ lapins. (1)
- c) $0,35 \times 2\,400 \times 0,5 = 420$; $0,35 \times 4\,500 \times 0,0625 \approx 98$. La croissance, maximale pour $K/2 = 2\,400$, est freinée près de K . (1)
- d) $0,35 \times 5\,280 \times (1 - 1,1) = -184,8$: l'effectif baisse à environ 5 095 et redescend vers 4 800. (1)

Repère — Au-dessus de K , le facteur $1 - \frac{u_n}{K}$ est négatif : le modèle logistique ramène la population vers la capacité d'accueil.

Exercice 4 – Fonction logistique

(4 pts)

- a) $Q(0) = \frac{250}{1+49} = 5$, soit 5 000 bactéries. (1)
- b) $e^{-4} \approx 0,01832$; $Q(5) \approx \frac{250}{1,89747} \approx 131,8$ milliers. (1)
- c) $49 e^{-0,8t} > 0$, donc le dénominateur est supérieur à 1 et $Q(t) < 250$. (1)
- d) $e^{-0,8t} \rightarrow 0$ donc $Q(t) \rightarrow 250$: capacité maximale de la culture. Au début, $49 e^{-0,8t}$ est grand devant 1, donc $Q(t) \approx \frac{250}{49} e^{0,8t}$: croissance exponentielle. (1)

Attention — Dans $\frac{K}{1+Ae^{-rt}}$, K est la limite et non la valeur initiale : l'effectif de départ vaut $\frac{K}{1+A}$.

Exercice 5 – Confronter un modèle aux données

(4 pts)

- a) Coefficient décennal $\frac{17,0}{14,2} \approx 1,1972$; $17,0 \times 1,1972 \approx 20,35$, soit environ 20,4 millions. (1)
- b) $\frac{29,2-24,3}{24,3} \approx 0,20$: le modèle surestime d'environ 20 %. (1)
- c) 1,197 ; 1,165 ; 1,116 ; 1,100 : le coefficient diminue à chaque décennie, la croissance ralentit. (1)
- d) Modèle logistique (croissance freinée). Facteurs : baisse de la natalité (transition démographique), vieillissement, solde migratoire. (1)

À retenir — Un modèle calé sur une courte période ne vaut que tant que ses hypothèses restent vraies ; l'écart relatif mesure sa fiabilité.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).