

Corrigé et barème – Proportionnalité, pourcentages et gestion de données — niveau ★★★

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 6^e

Exercice 1 – Calculs sans calculatrice

(4 pts)

- a) 10 % de 260 font 26 ; 30 % font $3 \times 26 = 78$; 5 % font $26 \div 2 = 13$; donc 35 % font $78 + 13 = 91$. (1 pt : 0,5 pour la décomposition, 0,5 pour le résultat) (1)
- b) $12,5\% = \frac{12,5}{100} = \frac{125}{1\,000} = \frac{1}{8}$. On calcule $456 \div 8$ en prenant trois fois la moitié : 228, 114, puis 57. Résultat : 57. (1 pt : 0,5 pour reconnaître $\frac{1}{8}$, 0,5 pour le résultat) (1)
- c) On regroupe : $(17,5 + 8,5) + (13 + 15) + (11 + 19) + (12,25 + 15,75) = 26 + 28 + 30 + 28 = 112$. Il y a 8 valeurs : $112 \div 8 = 14$. (1 pt : 0,5 pour la somme, 0,5 pour la moyenne) (1)
- d) Prix de 1 kg : $101,50 \div 7 = 14,50$ € (car $7 \times 14 = 98$ et $7 \times 0,5 = 3,5$). Prix de 12 kg : $12 \times 14,5 = 168 + 6 = 174$ €. (1 pt : 0,5 pour le retour à l'unité, 0,5 pour le résultat) (1)

Astuce — décomposer un pourcentage en pourcentages faciles ($35\% = 30\% + 5\%$), reconnaître $12,5\% = \frac{1}{8}$ et regrouper les termes d'une somme qui donnent des nombres ronds.

Exercice 2 – Justifier sans calculer

(4 pts)

- a) Si le tableau était proportionnel, comme $9 = 3 + 6$, l'additivité donnerait $9 \rightarrow 7 + 14 = 21$. Or on lit 22 : le tableau n'est pas proportionnel. (1 pt : 0,5 pour la propriété utilisée, 0,5 pour la conclusion) (1)
- b) La somme des cinq notes vaut $5 \times 13 = 65$. Avec un 13 : $65 + 13 = 78 = 6 \times 13$, la moyenne reste 13. Avec un 19 : $65 + 19 = 84$ et $84 \div 6 = 14$; la moyenne augmente de 1 point, car les 6 points au-dessus de 13 se répartissent sur 6 notes. (1 pt : 0,5 par cas) (1)
- c) Les angles sont proportionnels aux effectifs, donc aux pourcentages, et 360° correspondent à 100 % : le nombre total de personnes n'intervient pas. Lait : $\frac{108}{360} = \frac{3}{10} = 30\%$. Jus de fruits : $\frac{54}{360} = \frac{3}{20} = \frac{15}{100} = 15\%$. (1 pt : 0,5 pour l'explication, 0,5 pour les deux pourcentages) (1)
- d) Au $\frac{1}{50\,000}$, 1 cm représente 50 000 cm, soit deux fois plus qu'au $\frac{1}{25\,000}$. Pour une même distance réelle, il faut donc deux fois moins de centimètres : $8 \div 2 = 4$ cm. (1 pt : 0,5 pour le raisonnement, 0,5 pour le résultat) (1)

Méthode — justifier sans calculer, c'est s'appuyer sur une propriété : l'additivité pour un tableau, « somme = moyenne $\times$ effectif » pour une moyenne, la proportionnalité des angles aux effectifs pour un diagramme circulaire.

Exercice 3 – Recherche — toutes les solutions**(4 pts)**

- a) $12,5\% = \frac{1}{8}$: le nombre de « non » est le huitième du nombre de personnes interrogées ; comme c'est un entier, ce nombre est un multiple de 8. De même, $10\% = \frac{1}{10}$: le dixième du nombre de personnes est entier, donc ce nombre est un multiple de 10. (1 pt : 0,5 par condition) (1,33333)
- b) Un multiple de 10 se termine par 0. Les multiples de 8 ont pour chiffres des unités 8, 6, 4, 2, 0 (8, 16, 24, 32, 40), puis ce cycle recommence, car ajouter $5 \times 8 = 40$ ne change pas le chiffre des unités (48, 56, 64, 72, 80...). Seul un multiple de 8 sur cinq se termine par 0 : ce sont 40, 80, 120, 160, 200, ... Le nombre étant inférieur à 200, les seules possibilités sont 40, 80, 120 et 160 personnes. (1 pt : 0,5 pour une recherche organisée qui prouve qu'on n'oublie rien, 0,5 pour les quatre solutions) (1,33333)
- c) La somme des trois notes vaut $3 \times 18 = 54$. Si la meilleure note valait 18 ou moins, les deux autres, différentes, vaudraient au plus 17 et 16, et la somme au plus $18 + 17 + 16 = 51 < 54$: impossible. La meilleure note vaut donc 19 ou 20. Si c'est 20 : les deux autres font $54 - 20 = 34$ et valent au plus 19, d'où $19 + 15$ ou $18 + 16$ ($17 + 17$ est exclu, les notes étant différentes). Si c'est 19 : les deux autres font 35 et valent au plus 18, d'où seulement $18 + 17$. Il y a exactement trois possibilités : (15 ; 19 ; 20), (16 ; 18 ; 20) et (17 ; 18 ; 19). (2 pts : 0,5 pour la somme 54, 0,5 pour l'élimination des cas où la meilleure note vaut au plus 18, 1 pour les trois solutions obtenues par une recherche ordonnée) (1,33333)

Astuce — pour être sûr de n'oublier aucune solution, on organise la recherche : repérer un cycle qui se répète, ou classer les cas selon la plus grande valeur et éliminer les cas impossibles par un argument.

Exercice 4 – Problème — le potager du collège**(5 pts)**

- a) Dimensions réelles : 1 cm sur le plan représente 200 cm = 2 m, donc le potager mesure $10 \times 2 = 20$ m sur $6 \times 2 = 12$ m. Aire : $20 \times 12 = 240 \text{ m}^2$. Tomates : un quart, soit $240 \div 4 = 60 \text{ m}^2$. Récolte : $60 \times 5 = 300 \text{ kg}$. Masse vendue : 10 % de 300 kg font 30 kg, donc 80 % font $8 \times 30 = 240 \text{ kg}$. Recette : $240 \times 2,5 = 480 + 120 = 600 \text{ €}$. Comme $600 > 550$, le club atteindra son objectif. (3 pts : 0,5 pour les dimensions réelles, 0,5 pour l'aire, 0,5 pour la surface des tomates, 0,5 pour la récolte, 0,5 pour la masse vendue, 0,5 pour la recette et la conclusion) (1,66667)
- b) La cantine reçoit $300 - 240 = 60 \text{ kg}$ de tomates. Consommation par jour : $150 \times 80 = 12\,000 \text{ g} = 12 \text{ kg}$. Durée : $60 \div 12 = 5$ jours. (1 pt : 0,5 pour la masse reçue et la consommation par jour, 0,5 pour le résultat) (1,66667)
- c) Somme : $38 + 52 + 61 + 49 = 90 + 110 = 200 \text{ kg}$; moyenne : $200 \div 4 = 50 \text{ kg}$ par semaine. À ce rythme : $300 \div 50 = 6$ semaines en tout, soit encore 2 semaines après les quatre premières, qui ont déjà donné 200 kg. (1 pt : 0,5 pour la moyenne, 0,5 pour le nombre de semaines) (1,66667)

Piège — l'échelle s'applique aux longueurs, pas aux aires : on convertit d'abord chaque côté en mètres, puis on calcule l'aire. Multiplier l'aire du plan (60 cm^2) par 200 donnerait un résultat faux.

Exercice 5 – Défi — deux classes réunies*(3 pts)*

- a) 6e A : 60 % de 20 = 12 filles. 6e B : 40 % de 30 = 12 filles. Réunies : 12 + 12 = 24 filles sur 20 + 30 = 50 élèves, soit $\frac{24}{50} = \frac{48}{100} = 48\%$, et non 50 %. (1 pt : 0,5 pour les nombres de filles, 0,5 pour le pourcentage) (1)
- b) Il faut autant de filles que de garçons. La 6e A compte 12 filles et 8 garçons : 4 filles de plus que de garçons. En 6e B, l'effectif est un multiple de 5 (pour que 40 % tombe juste) et chaque groupe de 5 élèves compte 2 filles et 3 garçons : il apporte 1 garçon de plus que de filles. Pour compenser les 4 filles d'avance, il faut exactement 4 groupes de 5, soit 20 élèves ; avec moins, les filles restent plus nombreuses, avec plus, ce sont les garçons. Vérification : 12 + 8 = 20 filles sur 20 + 20 = 40 élèves, soit 50 %. (1 pt : 0,5 pour le raisonnement, 0,5 pour la réponse vérifiée) (1)
- c) Si les deux classes ont le même effectif, les deux pourcentages portent sur le même nombre : on peut les additionner (par exemple, 60 % d'un nombre plus 40 % du même nombre font 100 % de ce nombre). Les filles des deux classes représentent donc la somme des deux pourcentages d'une seule classe. Mais les deux classes réunies comptent deux fois plus d'élèves qu'une classe : le pourcentage cherché est la moitié de cette somme, c'est-à-dire la moyenne des deux pourcentages. Exemple : deux classes de 25 élèves avec 60 % et 40 % de filles donnent 15 + 10 = 25 filles sur 50, soit 50 %. (1 pt : 0,5 pour l'addition des pourcentages d'un même nombre, 0,5 pour la division par deux justifiée) (1)

Erreur fréquente — on ne fait pas la moyenne de deux pourcentages calculés sur des effectifs différents : on revient aux effectifs (nombre de filles, nombre total d'élèves), puis on recalcule le pourcentage.