

Corrigé et barème – Opérations, division euclidienne et divisibilité — niveau ★★★

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 6^e

Exercice 1 – Sans calculer

(3 pts)

- a) $2\,346 = 2 \times 1\,173$ (nombre pair) et $5\,675 = 5 \times 1\,135$ (dernier chiffre 5), donc le produit vaut $10 \times 1\,173 \times 1\,135$: c'est un multiple de 10, il se termine par 0 (0,5 pt). Or 13 313 551 se termine par 1 : l'égalité est fausse (0,5 pt). Le vrai produit est 13 313 550. (1)
- b) $7 < 9$, donc $A = 9 \times 358 + 7$ est déjà l'égalité de la division : quotient 358, reste 7 (0,5 pt). Pour B , $13 > 9$ et $13 = 9 + 4$, donc $B = 9 \times 359 + 4$: quotient 359, reste 4 (0,5 pt). (1)
- c) La somme des chiffres vaut 9 : oui, $111\,111\,111 = 9 \times k$ pour un entier k (en fait $k = 12\,345\,679$) (0,5 pt). Alors $111\,111\,111 \times 4 = 9 \times k \times 4 = 36 \times k$: c'est un multiple de 36 (0,5 pt). (1)

Astuce — pour montrer qu'un produit est un multiple d'un nombre, on fait apparaître ce nombre comme facteur en décomposant chaque facteur ; aucun grand calcul n'est nécessaire.

Exercice 2 – Calculs longs sous contrôle

(5 pts)

- a) $7\,048 \times 9 = 63\,432$; $7\,048 \times 300 = 2\,114\,400$; $63\,432 + 2\,114\,400 = 2\,177\,832$ (0,5 pt). Contrôle : $7\,000 \times 300 = 2\,100\,000$, ordre de grandeur cohérent (0,5 pt). (1)
- b) $3 + 0 + 9 = 12$: 309 est un multiple de 3 ; $48 = 4 \times 12$: 7 048 est un multiple de 4. Le produit contient donc les facteurs 3 et 4 (0,5 pt). Vérification : $2 + 1 + 7 + 7 + 8 + 3 + 2 = 30$, multiple de 3 ; $32 = 4 \times 8$, multiple de 4 (0,5 pt). (1)
- c) $50 \div 47$: 1 fois, reste 3 ; $30 \div 47$: 0 fois, reste 30 ; $300 \div 47$: 6 fois, reste 18 ; $180 \div 47$: 3 fois, reste 39 (0,5 pt). Quotient 1 063, reste 39 : $50\,000 = 47 \times 1\,063 + 39$ avec $39 < 47$ (vérification : $47 \times 1\,063 = 49\,961$) (0,5 pt). (1)
- d) $1\,001 \times 437 = 437\,000 + 437 = 437\,437$ (0,5 pt) ; $999 \times 437 = 437\,000 - 437 = 436\,563$ (0,5 pt). (1)
- e) $999 = 9 \times 111$, donc $436\,563 = 999 \times 437 = 9 \times 111 \times 437$ est un multiple de 9 ; la somme des chiffres, 27, le confirme (0,5 pt). $111 \times 437 = 43\,700 + 4\,370 + 437 = 48\,507$, donc $436\,570 = 9 \times 48\,507 + 7$ avec $7 < 9$: quotient 48 507, reste 7 (0,5 pt). (1)

Méthode — un calcul long se contrôle de deux façons indépendantes : l'ordre de grandeur (le résultat est-il plausible ?) et les critères de divisibilité (le résultat a-t-il les diviseurs attendus ?).

Exercice 3 – Recherche — toutes les solutions

(4 pts)

- a) Par 5 : $\triangle = 0$ ou $\triangle = 5$ (0,5 pt). Si $\triangle = 0$: la somme vaut $11 + \square$ avec $\square$ de 1 à 9 (premier chiffre non nul), donc entre 12 et 20 ; seul multiple de 9 : 18, d'où $\square = 7$ et le nombre 7 740 (0,5 pt). Si $\triangle = 5$: la somme vaut $16 + \square$, entre 17 et 25 ; seul multiple de 9 : 18, d'où $\square = 2$ et le nombre 2 745 (0,5 pt). Deux solutions : 7 740 et 2 745. (1,33333)
- b) Si le quotient et le reste valent tous deux r , le nombre vaut $8 \times r + r$, c'est-à-dire $9 \times r$ (0,5 pt). Le reste est plus petit que 8 et le nombre est non nul, donc r va de 1 à 7, pas d'autre possibilité (0,5 pt). Solutions : 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63 ; par exemple $45 = 8 \times 5 + 5$ et $63 = 8 \times 7 + 7$ (0,5 pt). (1,33333)
- c) Par 4 : parmi 02, 12, 22, ..., 92, les multiples de 4 sont 12, 32, 52, 72, 92, donc $\square = 1, 3, 5, 7$ ou 9 (0,5 pt). Par 9 en plus : la somme $6 + \square + 2 = 8 + \square$ est comprise entre 8 et 17, seul multiple de 9 : 9, donc $\square = 1$, qui est bien dans la liste : 612 (0,5 pt). (1,33333)

Piège — pour prouver qu'on n'oublie aucune solution, il faut encadrer : un chiffre va de 0 à 9 (de 1 à 9 en tête de nombre) et un reste est toujours plus petit que le diviseur.

Exercice 4 – Problème — la livraison de cahiers*(4 pts)*

- a) $2016 = 12 \times 168$ (vérification : $12 \times 168 = 1\,200 + 816 = 2\,016$) : 168 paquets (0,5 pt). $168 = 9 \times 18 + 6$ avec $6 < 9$ (0,5 pt) : 18 cartons pleins et un carton de 6 paquets, soit 19 cartons (0,5 pt). (1,33333)
- b) $19 = 7 \times 2 + 5$ avec $5 < 7$ (0,5 pt) : deux voyages complets ne suffisent pas, il faut 3 voyages, le dernier avec 5 cartons (0,5 pt). (1,33333)
- c) Recette : $2\,016 \times 2 = 4\,032$ € (0,5 pt). Dépenses : $19 \times 38 = 760 - 38 = 722$ € et $1\,350 + 722 = 2\,072$ € (0,5 pt). Bénéfice : $4\,032 - 2\,072 = 1\,960$ € (0,5 pt). (1,33333)

Astuce — dans un problème en chaîne, chaque résultat intermédiaire (paquets, puis cartons, puis voyages) sert à la question suivante : on l'écrit avec son unité avant de continuer.

Exercice 5 – Défi — le reste caché*(4 pts)*

- a) $11 = 6 \times 1 + 5$, $29 = 6 \times 4 + 5$, $47 = 6 \times 7 + 5$ (0,5 pt). Par 3 : $11 = 3 \times 3 + 2$, $29 = 3 \times 9 + 2$, $47 = 3 \times 15 + 2$: le reste vaut 2 à chaque fois (0,5 pt). (1)
- b) $6 \times q = 3 \times (2 \times q)$ et $5 = 3 + 2$, donc $n = 3 \times (2 \times q) + 3 + 2 = 3 \times (2 \times q + 1) + 2$ (0,5 pt). Comme $2 < 3$, c'est l'égalité de la division euclidienne de n par 3 : le reste vaut toujours 2 (0,5 pt). (1)
- c) $6 \times q = 2 \times (3 \times q)$ et $5 = 2 \times 2 + 1$, donc $n = 2 \times (3 \times q + 2) + 1$ (0,5 pt). Comme $1 < 2$, le reste vaut 1 : n est toujours impair (0,5 pt). (1)
- d) Le nombre s'écrit $12 \times q + 7$, et $12 \times q$ est un multiple de 4 et de 3. Par 4 : $7 = 4 + 3$, le reste vaut 3 (0,5 pt). Par 3 : $7 = 3 \times 2 + 1$, le reste vaut 1 (0,5 pt). Exemple : $19 = 12 \times 1 + 7 = 4 \times 4 + 3 = 3 \times 6 + 1$. (1)

Erreur fréquente — croire que le reste ne change pas quand on change de diviseur : le reste 5 par 6 devient 2 par 3 ; il faut toujours ramener le reste en dessous du nouveau diviseur.