

Corrigé et barème – Droites, angles, repérage et figures — niveau ★★★

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 6^e

Exercice 1 – Automatismes justifiés

(3 pts)

- a) Isocèle en A : $AB = AC$. Donc $AB + AC = 23 - 7 = 16$ cm et $AB = 16 \div 2 = 8$ cm. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)
- b) $EF = 9,05 - 3,75 = 5,3$; $EK = 5,3 \div 2 = 2,65$; l'abscisse de K est $3,75 + 2,65 = 6,4$. (0,5 pt pour EF + 0,5 pt pour l'abscisse) (1)
- c) $\widehat{xOt} = 147^\circ \div 2 = 73,5^\circ$ (car $146 \div 2 = 73$ et $1 \div 2 = 0,5$). Comme $73,5^\circ < 90^\circ$, l'angle est aigu. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

Erreur fréquente — dans un triangle isocèle dont on connaît le périmètre, on retire d'abord la base, puis on partage le reste en deux ; diviser directement le périmètre ne donne rien de juste.

Exercice 2 – Recherche — un point au milieu

(4 pts)

- a) $AB = 10 - 6 = 4$; C est à $4 \div 2 = 2$ unités de A , vers B : abscisse $6 + 2 = 8$. (1 pt) (1)
- b) A milieu de $[BC]$: C est de l'autre côté de A , à la distance $AB = 4$, d'où l'abscisse $6 - 4 = 2$. B milieu de $[AC]$: C est au-delà de B , à la distance 4, d'où l'abscisse $10 + 4 = 14$. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)
- c) Le milieu ne peut être que l'un des trois points : C , A ou B . Ces trois cas couvrent toutes les possibilités, et dans chacun d'eux la distance et le côté où se trouve C sont imposés, donc une seule position convient. Il y a exactement trois solutions : 2, 8 et 14. (1 pt) (1)
- d) $AB = 10 - 3 = 7$. C milieu : $3 + 7 \div 2 = 3 + 3,5 = 6,5$. B milieu : $10 + 7 = 17$. A milieu : il faudrait reculer de 7 unités à partir de l'abscisse 3, donc passer avant l'origine, hors de la demi-droite : impossible. Il y a deux solutions, 6,5 et 17. (0,5 pt pour les calculs + 0,5 pt pour le cas impossible) (1)

Méthode — pour trouver toutes les solutions, on découpe le problème en cas qui couvrent toutes les possibilités, puis on traite chaque cas : c'est ce découpage qui garantit qu'on n'oublie rien.

Exercice 3 – Qui a raison ?

(4 pts)

- a) Vrai : la symétrie axiale conserve les mesures d'angles, donc le symétrique d'un angle de 35° mesure aussi 35° . (0,5 pt + 0,5 pt) (1)
- b) Faux : les deux premiers points ont l'ordonnée 4, ils sont sur la droite horizontale des points d'ordonnée 4 ; le troisième a pour ordonnée 1, il n'est pas sur cette droite. Les trois points ne sont donc pas alignés (ils forment même un angle droit en (3 ; 4)). (0,5 pt + 0,5 pt) (1)
- c) Vrai : les trois côtés sont égaux, chacun mesure $19,5 \div 3 = 6,5$ cm. Les deux autres sommets sont donc à 6,5 cm du sommet choisi : ils sont sur ce cercle. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)
- d) Faux : contre-exemple, deux angles aigus de 60° et 50° placés côte à côte forment un angle de $60^\circ + 50^\circ = 110^\circ$, qui est obtus. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

Piège — des points qui partagent une coordonnée deux à deux ne sont pas forcément alignés : il faut que les trois aient la même abscisse, ou la même ordonnée, pour conclure aussi vite.

Exercice 4 – Problème — l'arrosage du terrain

(4 pts)

- a) Horizontalement, le terrain va de 1 à 13 : longueur 12, milieu en $1 + 12 \div 2 = 7$. Verticalement, il va de 1 à 8 : longueur 7, milieu en $1 + 7 \div 2 = 4,5$. Donc $F(7; 4,5)$. (0,5 pt par coordonnée) (1)
- b) Les milieux des côtés sont $(7; 1)$, $(7; 8)$, $(1; 4,5)$ et $(13; 4,5)$. Les deux premiers sont à $4,5 - 1 = 3,5$ m de F (même abscisse), les deux autres à $7 - 1 = 6$ m (même ordonnée). Pour les atteindre tous, il faut un rayon d'au moins 6 m. (0,5 pt pour les distances + 0,5 pt pour la conclusion) (1)
- c) Les côtés les plus proches de F sont $[AB]$ et $[CD]$, à 3,5 m. Avec un rayon de 3,5 m, le cercle touche ces côtés en $(7; 1)$ et $(7; 8)$ sans les franchir, et il reste à $6 - 3,5 = 2,5$ m des deux autres côtés. Avec un rayon plus grand, l'eau franchirait $[AB]$ et $[CD]$. Rayon maximal : 3,5 m. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)
- d) L'axe horizontal est formé des points d'ordonnée 4,5 ; à cette hauteur, un rayon de 3,5 m atteint les ordonnées 1 et 8, donc les côtés $[AB]$ et $[CD]$. G doit être à 3,5 m du côté $[AD]$ (abscisse 1) : $G(4,5; 4,5)$. H doit être à 3,5 m du côté $[BC]$ (abscisse 13) : $H(9,5; 4,5)$. L'autre axe est la droite verticale des points d'abscisse 7 : $7 - 4,5 = 2,5$ et $9,5 - 7 = 2,5$, avec la même ordonnée, donc G et H sont symétriques par rapport à cet axe. (0,5 pt pour les coordonnées + 0,5 pt pour la symétrie) (1)

Astuce — le centre d'un rectangle placé dans un repère et ses deux axes de symétrie s'obtiennent en prenant le point à mi-chemin des abscisses et celui des ordonnées.

Exercice 5 – Défi — deux symétries à la suite

(5 pts)

- a) Elles sont toutes deux verticales, donc perpendiculaires à l'axe des abscisses : deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles, donc $(d_1) \parallel (d_2)$. Elles sont séparées de $7 - 3 = 4$ unités. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)
- b) A est à $3 - 1 = 2$ unités à gauche de (d_1) : A_1 est à 2 unités à droite, $A_1(5; 2)$. A_1 est à $7 - 5 = 2$ unités à gauche de (d_2) : $A_2(9; 2)$. A et A_2 ont la même ordonnée : $AA_2 = 9 - 1 = 8$. (0,5 pt pour A_1 et A_2 + 0,5 pt pour AA_2) (1)
- c) B est à $4,5 - 3 = 1,5$ unité à droite de (d_1) : B_1 est à 1,5 unité à gauche, $B_1(1,5; 6)$. B_1 est à $7 - 1,5 = 5,5$ unités à gauche de (d_2) : B_2 a pour abscisse $7 + 5,5 = 12,5$, $B_2(12,5; 6)$. $BB_2 = 12,5 - 4,5 = 8$. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)
- d) Dans les deux cas, M_2 a la même ordonnée que M et se trouve 8 unités plus à droite. Conjecture : on passe de M à M_2 en glissant de 8 unités vers la droite, soit le double de la distance 4 qui sépare (d_1) et (d_2) . (0,5 pt + 0,5 pt) (1)
- e) Les deux symétries se font par rapport à des droites verticales : tous les points restent sur la même horizontale que M . Si M_1 est entre les deux droites, M est à gauche de (d_1) et M_2 à droite de (d_2) . Le trajet de M à M_2 se découpe en : de M à (d_1) , puis de (d_1) à M_1 (même longueur, par symétrie), puis de M_1 à (d_2) , puis de (d_2) à M_2 (même longueur, par symétrie). Donc $MM_2 = 2 \times (\text{distance de } M_1 \text{ à } (d_1)) + 2 \times (\text{distance de } M_1 \text{ à } (d_2))$. Comme M_1 est entre les deux droites, ces deux distances s'ajoutent pour donner l'écart entre les droites, 4 : $MM_2 = 2 \times 4 = 8$, vers la droite. (0,5 pt pour le découpage + 0,5 pt pour la conclusion) (1)

Méthode — pour démontrer une conjecture, on décrit les longueurs en mots plutôt qu'en nombres et on enchaîne les égalités données par la symétrie : le résultat ne dépend plus du point choisi.