Symétrie centrale : demi-tour et propriétés

Fiche méthode

(Mathématiques 5e · Espace et géométrie · Transformations)

La démarche pour toute question de symétrie, axiale ou centrale

1. Je repère l'élément de référence. Une droite : c'est une symétrie axiale, on plie le long de l'axe. Un point O : c'est une symétrie centrale, on fait un demi-tour autour de lui.

2. Je pense « milieu ». Un point et son symétrique : l'axe coupe le segment qui les joint perpendiculairement en son milieu ; le centre O est le milieu de ce segment.

3. Je conclus avec les propriétés conservées. Les deux symétries conservent longueurs, angles, aires et alignement ; avec le demi-tour, une droite a pour image une droite parallèle.

Le réflexe — O est le milieu de [MM′] : M′ est de l'autre côté de O, sur la droite (MO), à la même distance.

Cas 1 · Rappels de 6e : la symétrie axiale

Réflexe — je compte (ou je mesure) la distance de chaque sommet à l'axe, perpendiculairement à l'axe, et je reporte la même distance de l'autre côté (en biais si l'axe suit les diagonales des carreaux) ; pour les axes d'une figure, je la plie dans ma tête.

Exemple 1. Sur un quadrillage, l'axe (d) est vertical. P est à 3 carreaux à droite de (d), et Q est sur (d). Où sont P' et Q' ?

P' est sur la même ligne que P, à 3 carreaux à gauche de (d) : (d) coupe $[PP']$ perpendiculairement en son milieu.

Q est sur l'axe : $Q' = Q$.

Exemple 2. Combien d'axes de symétrie ont un triangle isocèle non équilatéral et un losange non carré ?

Le triangle isocèle : 1 axe, la droite qui passe par le sommet principal et le milieu de la base.

Le losange : 2 axes, les droites qui portent ses diagonales.

Attention — on compte jusqu'à l'axe, pas jusqu'au bord, et perpendiculairement à l'axe ; les diagonales d'un rectangle non carré ne sont pas des axes de symétrie.

Cas 2 · Symétrie axiale ou centrale ? Centre de symétrie

Réflexe — je tourne la feuille d'un demi-tour dans ma tête : tête en bas sans miroir → symétrie centrale ; retournée en miroir → symétrie axiale ; figure inchangée → elle a un centre de symétrie.

Exemple 1. La lettre Z, écrite en capitales bâton, a-t-elle un centre de symétrie ? un axe ?

Après un demi-tour autour du milieu de sa barre oblique, le Z se superpose à lui-même : ce point est son centre de symétrie.

Aucun pliage ne superpose ses deux moitiés : le Z n'a pas d'axe de symétrie.

Exemple 2. Pour passer d'une figure à son image, les segments $[AA']$, $[BB']$, $[CC']$ ont tous le même milieu K. Quelle transformation ?

Tous les segments ont le même milieu : c'est la symétrie centrale de centre K.

Attention — le triangle équilatéral a trois axes de symétrie mais aucun centre ; les axes ne donnent pas un centre.

Cas 3 · Construire un symétrique

Réflexe — je prolonge le segment [MO] au-delà de O de la longueur OM ; sur quadrillage, je refais après O le même

trajet de carreaux que de M à O.

Exemple 1. Sur un quadrillage, pour aller de P à O, on avance de 2 carreaux vers la gauche et de 3 vers le haut. Où est P' ?

À partir de O, je refais le même trajet : P' est 2 carreaux à gauche et 3 carreaux au-dessus de O.

Exemple 2. Sans quadrillage : $OR = 3{,}2$ cm. Construire R' et donner RR'.

Je trace la demi-droite $[RO)$ et je reporte au compas 3,2 cm de l'autre côté de O.
O est le milieu de $[RR']$: $RR' = 2 \times 3{,}2 = 6{,}4$ cm.

Attention — pour une figure, je construis le symétrique de chaque sommet, puis je relie dans le même ordre.

Cas 4 · Utiliser les propriétés conservées

Réflexe — une mesure sur la figure image se lit sur la figure de départ ; pour justifier, j'écris « Or la symétrie centrale conserve… ».

Exemple. Le triangle $K'L'M'$ est le symétrique du triangle KLM par rapport à O, avec $KL = 4{,}4$ cm et $\widehat{KLM} = 105^\circ$.

La symétrie centrale conserve les longueurs : $K'L' = KL = 4{,}4$ cm.
Elle conserve les angles : $\widehat{K'L'M'} = 105^\circ$. Et $(K'L')$ est parallèle à (KL).

Attention — l'image d'une droite est une droite parallèle, pas perpendiculaire ; si la droite passe par O, c'est la droite elle-même.

Les pièges

- Confondre les deux symétries : un axe est une droite, un centre est un point.
- Compter les carreaux jusqu'au bord de la feuille, ou en biais, au lieu de les compter perpendiculairement jusqu'à l'axe.
- Placer M' du même côté que M : M' est de l'autre côté de O.
- Sur quadrillage, revenir en arrière après O au lieu de continuer dans le même sens.
- Croire qu'une figure avec des axes a forcément un centre de symétrie.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).