Triangles : médiatrices, hauteurs et médianes

Fiche méthode

(Mathématiques 5e · Espace et géométrie · Triangles)

La démarche pour un exercice sur les droites remarquables

1. Je fais une figure à main levée codée : milieux, angles droits, côtés égaux.

2. Je repère la droite dont on parle : passe-t-elle par un sommet ? par un milieu ? fait-elle un angle droit ?

3. J'utilise la propriété qui va avec (MA = MB sur la médiatrice ; OA = OB = OC ; hauteurs concourantes ; aire partagée en deux) et je rédige : on sait que… ; or… ; donc…

Le réflexe — médiatrice : milieu + angle droit ; hauteur : sommet + angle droit ; médiane : sommet + milieu.

Cas 1 · Rappels de 6e : médiatrice et cercle circonscrit

Réflexe — pour la médiatrice de $[AB]$, deux arcs de même rayon (plus de la moitié de AB) centrés en A et en B ; centre du cercle circonscrit : $OA = OB = OC$.

Exemple 1. Construire la médiatrice de $[RS]$, avec $RS = 8{,}2$ cm.

Écartement de 5 cm, plus grand que $8{,}2 \div 2 = 4{,}1$ cm : un arc de centre R, puis un arc de centre S, de part et d'autre de $[RS]$. Ils se coupent en P et Q.

$PR = PS$ et $QR = QS$: P et Q sont sur la médiatrice de $[RS]$, qui est la droite (PQ).

Exemple 2. O est le centre du cercle circonscrit au triangle JKL et $\widehat{JOK} = 124^\circ$. Calculer $\widehat{OJK}$.

O est sur la médiatrice de $[JK]$, donc $OJ = OK$: le triangle OJK est isocèle en O.

Ses angles à la base sont égaux : $\widehat{OJK} = \widehat{OKJ} = (180^\circ - 124^\circ) \div 2 = 28^\circ$.

Attention — deux médiatrices suffisent pour placer O ; et O n'est dans le triangle que si ses trois angles sont aigus.

Cas 2 · Médiatrices dans les triangles particuliers

Réflexe — deux côtés égaux : le sommet commun est sur la médiatrice du troisième côté ; un point de la médiatrice de $[BC]$ forme avec B et C un triangle isocèle.

Exemple. Le point K est sur la médiatrice de $[EF]$, avec $KE = 3{,}9$ cm et $EF = 5$ cm. Nature et périmètre du triangle KEF ?

K est sur la médiatrice de $[EF]$: $KF = KE = 3{,}9$ cm, le triangle KEF est isocèle en K.

Périmètre : $3{,}9 + 3{,}9 + 5 = 12{,}8$ cm.

Attention — la médiatrice d'un côté passe par le sommet opposé seulement si le triangle est isocèle en ce sommet.

Cas 3 · Tracer et utiliser une hauteur

Réflexe — un sommet, et un angle droit sur le côté opposé (prolongé si l'angle est obtus).

Exemple. Dans le triangle MNP, H est le pied de la hauteur issue de M et $\widehat{MPH} = 61^\circ$. Calculer $\widehat{PMH}$.

La hauteur est perpendiculaire à (NP) : le triangle MHP est rectangle en H.

Ses angles aigus sont complémentaires : $\widehat{PMH} = 90^\circ - 61^\circ = 29^\circ$.

Attention — la hauteur relative au côté $[NP]$ part du sommet M, celui qui ne touche pas $[NP]$.

Cas 4 · Médiane et aires

Réflexe — médiane : sommet + milieu du côté opposé ; elle coupe l'aire en deux.

Exemple. I est le milieu de $[EF]$ dans le triangle DEF, d'aire 38 cm². Trouver l'aire de DEI.

(DI) est la médiane issue de D : elle partage DEF en deux triangles de même aire.
Aire de DEI : $38 \div 2 = 19$ cm².

Attention — même aire ne veut pas dire même forme : DEI et DIF ne sont pas superposables en général.

Cas 5 · Reconnaître une droite remarquable

Réflexe — sommet + angle droit : hauteur ; sommet + milieu : médiane ; milieu + angle droit : médiatrice.

Exemple. Le triangle XYZ est isocèle en X et I est le milieu de $[YZ]$. Que représente la droite (XI) ?

(XI) passe par le sommet X et par le milieu de $[YZ]$: c'est la médiane issue de X.
Comme $XY = XZ$, X est sur la médiatrice de $[YZ]$: (XI) est cette médiatrice, donc aussi la hauteur issue de X.

Attention — dans un triangle quelconque, ces trois droites sont distinctes.

Les pièges

- Croire qu'un point à égale distance de A et de B est forcément le milieu de $[AB]$: il est sur la médiatrice, pas forcément sur le segment.
- Croire que la médiatrice d'un côté passe toujours par le sommet opposé.
- Tracer la hauteur issue de A jusqu'au milieu de $[BC]$: elle va au pied de la perpendiculaire, pas au milieu.
- Oublier de prolonger le côté quand le triangle a un angle obtus.
- Confondre médiane et médiatrice : la médiane passe par un sommet, la médiatrice fait un angle droit avec le côté.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).