Devoir surveillé – symétrie centrale et parallélogrammes — niveau ★★★

Durée : 55 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 5e

Nom : _____ Date : _____ Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Enquête — Le quatrième sommet *(5 pts)*

Trace un repère orthogonal d'origine O sur ta feuille à petits carreaux, avec 1 cm pour une unité sur chaque axe. On place $A(-4\,;\,-1)$, $B(2\,;\,-3)$ et $C(3\,;\,2)$. Gradue l'axe des abscisses de -6 à 10 et l'axe des ordonnées de -7 à 5.

a) Place A, B et C, puis construis le point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme. Donne ses coordonnées en expliquant ta méthode.

b) Construis le point E tel que $ABEC$ soit un parallélogramme, et donne ses coordonnées. Justifie.

c) Construis le point F tel que $AFBC$ soit un parallélogramme, et donne ses coordonnées. Justifie.

d) Démontre que A est le milieu du segment $[DF]$.

e) Que représentent les points A, B et C pour le triangle DEF ? Justifie pour B et pour C.

Exercice 2 – Corriger une copie *(4 pts)*

Chaque ligne de cette copie contient une erreur (de résultat ou de justification). Explique-la, puis corrige.

a) « Le symétrique de $M(5\,;\,-2)$ par rapport à l'origine O du repère est $M'(-5\,;\,-2)$. »

b) « $RSTU$ a deux angles droits, en R et en S. Or un quadrilatère qui a des angles droits est un rectangle. Donc $RSTU$ est un rectangle. »

c) « $ABCD$ est un rectangle de centre O et $AC = 10$ cm. Les diagonales d'un parallélogramme ont la même longueur, donc $OB = 10 \div 2 = 5$ cm. »

d) « Le triangle $A'B'C'$ est le symétrique de ABC par rapport à O, et $\widehat{ABC} = 40°$. Le demi-tour retourne la figure, donc $\widehat{A'B'C'}$ mesure $180 - 40 = 140$, soit $140°$. »

Exercice 3 – Enquête — Où placer le point B ? *(4 pts)*

On place deux points A et O tels que $OA = 3$ cm. Pour tout point B qui n'est pas sur la droite (OA), on construit A' et B', symétriques respectifs de A et de B par rapport à O.

a) Démontre que, quelle que soit la position de B, le quadrilatère $ABA'B'$ est un parallélogramme.

b) Où faut-il placer B pour que $ABA'B'$ soit un rectangle ? Justifie, puis donne la longueur de ses diagonales.

c) Où faut-il placer B pour que $ABA'B'$ soit un losange ? Justifie.

d) Combien y a-t-il de positions de B pour lesquelles $ABA'B'$ est un carré ? Construis l'une d'elles et justifie.

Exercice 4 – Problème — Le losange et son demi-tour *(4 pts)*

$ABCD$ est un losange de périmètre 22 cm, et l'angle $\widehat{DAB}$ mesure le double de l'angle $\widehat{ABC}$.

a) Calcule la longueur AB, puis les mesures des quatre angles du losange. Justifie.

b) On construit $A'B'C'D'$, symétrique de $ABCD$ par rapport au point C. Donne, sans mesurer, son périmètre et la mesure de $\widehat{D'A'B'}$. Justifie.

c) Démontre que le quadrilatère $BDB'D'$ est un rectangle.

d) Ce rectangle $BDB'D'$ est-il un carré ? Justifie.

Exercice 5 – Défi — Les coordonnées cachées *(3 pts)*

Dans un repère orthogonal (même unité sur les deux axes), $KLMN$ est un carré de centre $P(1\,;\,2)$, et l'un de ses sommets est $K(-2\,;\,2)$.

a) Donne les coordonnées du sommet M. Justifie.

b) Donne les coordonnées des sommets L et N, sachant que L est au-dessus de N. Justifie chaque étape.

c) Trouve les coordonnées de deux points R et S tels que $KRMS$ soit un losange qui n'est pas un carré. Justifie.

Bon courage !

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).