Corrigé et barème – symétrie centrale et parallélogrammes — niveau ★★★

Durée : 55 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 5e

Exercice 1 – Enquête — Le quatrième sommet *(5 pts)*

a) De B à C : 1 unité vers la droite et 5 vers le haut. Même déplacement à partir de A : $D(-3\,;\,4)$. Alors $(AD)//(BC)$ et $AD = BC$: deux côtés opposés parallèles et de même longueur, $ABCD$ est un parallélogramme. (0,5 pt méthode justifiée + 0,5 pt coordonnées) (1)

b) Dans $ABEC$, le côté opposé à $[AB]$ est $[EC]$: il faut $(CE)//(AB)$ et $CE = AB$. De A à B : 6 vers la droite et 2 vers le bas ; même déplacement à partir de C : $E(9\,;\,0)$, un point de l'axe des abscisses. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

c) Dans $AFBC$, le côté opposé à $[AF]$ est $[BC]$: il faut $(AF)//(CB)$ et $AF = CB$. De C à B : 1 vers la gauche et 5 vers le bas ; même déplacement à partir de A : $F(-5\,;\,-6)$. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

d) De D à A : 1 vers la gauche et 5 vers le bas ; de A à F : encore 1 vers la gauche et 5 vers le bas. Le même trajet deux fois de suite : D, A, F sont alignés et $DA = AF$, donc A est le milieu de $[DF]$. Autre rédaction : (AD) et (AF) sont toutes deux parallèles à (BC) et passent par A, elles sont donc confondues ; et $AD = BC = AF$. (0,5 pt alignement + 0,5 pt égalité des longueurs) (1)

e) De F à B : 7 vers la droite et 3 vers le haut, et de B à E : encore 7 vers la droite et 3 vers le haut, donc B est le milieu de $[FE]$. De D à C : 6 vers la droite et 2 vers le bas, et de C à E : encore 6 vers la droite et 2 vers le bas, donc C est le milieu de $[DE]$. A, B et C sont les milieux des trois côtés du triangle DEF. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

Piège — trois points donnés ne fixent pas un seul parallélogramme : selon que $[AC]$, $[BC]$ ou $[AB]$ devient une diagonale, il y a trois quatrièmes sommets possibles, et c'est l'ordre des lettres dans le nom qui décide.

Exercice 2 – Corriger une copie *(4 pts)*

a) L'élève n'a changé que le signe de l'abscisse : il a construit le symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. De M à O : 5 vers la gauche et 2 vers le haut ; même trajet après O : $M'(-5\,;\,2)$. (0,5 pt explication + 0,5 pt correction) (1)

b) Deux angles droits ne suffisent pas : un trapèze rectangle en a deux sans être un rectangle (par exemple $RS = 4$ cm, $RU = 2$ cm et $ST = 3$ cm, avec les angles droits en R et en S). Il faut trois angles droits, ou un parallélogramme avec un angle droit. Ici, on ne peut pas conclure. (0,5 pt + 0,5 pt contre-exemple ou propriété correcte) (1)

c) Le résultat est juste, mais la justification est fausse : les diagonales d'un parallélogramme n'ont pas toujours la même longueur. Bonne rédaction : $ABCD$ est un rectangle, or les diagonales d'un rectangle ont la même longueur, donc $BD = AC = 10$ cm ; elles se coupent en leur milieu, donc $OB = 10 \div 2 = 5$ cm. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

d) La symétrie centrale conserve les mesures d'angles : $\widehat{A'B'C'} = \widehat{ABC} = 40°$. Le demi-tour met la figure « tête en bas », il ne change aucune mesure ; « $180° - 40°$ » est le calcul d'un angle consécutif dans un parallélogramme, pas celui d'une image. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

Erreur fréquente — un bon résultat ne suffit pas : la propriété citée doit être celle de la bonne figure ; « les diagonales ont la même longueur » est vrai pour le rectangle, pas pour tout parallélogramme.

Exercice 3 – Enquête — Où placer le point B ? *(4 pts)*

a) A' est le symétrique de A par rapport à O : O est le milieu de $[AA']$. De même, O est le milieu de $[BB']$. Les diagonales $[AA']$ et $[BB']$ de $ABA'B'$ ont donc le même milieu : c'est un parallélogramme. (1 pt) (1)

b) Il faut des diagonales de même longueur : $AA' = BB'$. Or $AA' = 2 \times OA$ et $BB' = 2 \times OB$: il faut $OB = OA = 3$ cm. B doit être sur le cercle de centre O et de rayon 3 cm (sauf aux deux points de ce cercle situés sur (OA)). Les diagonales mesurent alors $2 \times 3 = 6$ cm. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

c) Il faut des diagonales perpendiculaires : $(BB') \perp (AA')$. B doit être sur la perpendiculaire à (OA) passant par O (sauf en O lui-même). (1 pt) (1)

d) Pour un carré, il faut les deux conditions : B est à la fois sur le cercle de centre O de rayon 3 cm et sur la perpendiculaire à (OA) en O. Cette droite coupe le cercle en 2 points : il y a 2 positions. Construction : à l'équerre, la perpendiculaire à (OA) en O, puis au compas un point à 3 cm de O. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

Méthode — pour chercher « où placer un point », je traduis la nature voulue en conditions sur les diagonales (même longueur, perpendiculaires), puis chaque condition en une figure simple : un cercle, une droite.

Exercice 4 – Problème — Le losange et son demi-tour *(4 pts)*

a) Les quatre côtés d'un losange ont la même longueur : $AB = 22 \div 4 = 5{,}5$ cm. $\widehat{DAB}$ et $\widehat{ABC}$ sont consécutifs, leur somme vaut $180°$. Le premier vaut deux parts, le second une part : 3 parts font $180°$, une part vaut $180 \div 3 = 60$. Donc $\widehat{ABC} = 60°$ et $\widehat{DAB} = 120°$. Les angles opposés sont égaux : $\widehat{CDA} = 60°$ et $\widehat{BCD} = 120°$. (0,5 pt longueur + 0,5 pt angles) (1)

b) La symétrie centrale conserve les longueurs : $A'B'C'D'$ a quatre côtés de 5,5 cm, son périmètre vaut 22 cm. Elle conserve les angles : $\widehat{D'A'B'} = \widehat{DAB} = 120°$. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

c) B' et D' sont les symétriques de B et D par rapport à C : C est le milieu de $[BB']$ et de $[DD']$, les diagonales de $BDB'D'$, qui est donc un parallélogramme. De plus $BB' = 2 \times BC = 2 \times 5{,}5 = 11$ cm et $DD' = 2 \times DC = 11$ cm, car $BC = DC$ dans le losange. Or un parallélogramme qui a des diagonales de même longueur est un rectangle. Donc $BDB'D'$ est un rectangle. (0,5 pt parallélogramme + 0,5 pt diagonales égales et conclusion) (1)

d) Pour un carré, il faudrait en plus des diagonales perpendiculaires. Or (BB') est la droite (BC) et (DD') est la droite (DC), qui font en C l'angle $\widehat{BCD} = 120°$, pas $90°$. Les diagonales ne sont pas perpendiculaires : ce n'est pas un carré. (0,5 pt idée des diagonales + 0,5 pt angle de $120°$) (1)

Astuce — quand un angle vaut le double de son voisin et que leur somme vaut $180°$, on raisonne en parts : $1 + 2 = 3$ parts pour $180°$.

Exercice 5 – Défi — Les coordonnées cachées *(3 pts)*

a) Les diagonales d'un carré se coupent en leur milieu : P est le milieu de $[KM]$, donc M est le symétrique de K par rapport à P. De K à P : 3 vers la droite ; même trajet après P : $M(4\,;\,2)$. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

b) K et M ont la même ordonnée : la diagonale $[KM]$ est horizontale et mesure $3 + 3 = 6$ unités. Les diagonales d'un carré sont perpendiculaires : $[LN]$ est verticale et passe par P, donc L et N ont pour abscisse 1. Elles ont la même longueur et le même milieu : $PL = PN = 6 \div 2 = 3$. D'où $L(1\,;\,5)$ et $N(1\,;\,-1)$. (0,5 pt direction + 0,5 pt coordonnées) (1)

c) Par exemple $R(1\,;\,3)$ et $S(1\,;\,1)$. P est le milieu de $[RS]$ et de $[KM]$: $KRMS$ est un parallélogramme. Ses diagonales sont perpendiculaires ($[RS]$ verticale, $[KM]$ horizontale) : c'est un losange. $RS = 2$ et $KM = 6$: les diagonales n'ont pas la même longueur, ce n'est pas un rectangle, donc pas un carré. Toute réponse $R(1\,;\,2+d)$ et $S(1\,;\,2-d)$ avec d strictement positif et différent de 3 convient (ou les mêmes points échangés) ; pour $d = 3$, on retrouve le carré $KLMN$. (1 pt) (1)

Méthode — pour retrouver un sommet caché, je pars du centre : c'est le milieu des diagonales, donc chaque sommet est le symétrique du sommet opposé par rapport à lui.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).