# Corrigé et barème – symétrie centrale et parallélogrammes — niveau ★★

Durée : 55 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 5e

## Exercice 1 – Un parallélogramme dans un repère *(5 pts)*

a) $A$ : 4 unités à gauche, 2 en bas ; $B$ : 3 à droite, 2 en bas ; $C$ : 5 à droite, 3 en haut. (1 pt ; 0,5 pt si un point est faux, par exemple abscisse et ordonnée inversées) (1)

b) Pour aller de $B$ à $C$ : 2 unités vers la droite et 5 vers le haut. Je fais le même déplacement à partir de $A$ : $D(-2\,;\,3)$. Ainsi $(AD)//(BC)$ et $AD = BC$ : deux côtés opposés parallèles et de même longueur, $ABCD$ est bien un parallélogramme. (0,5 pt déplacement justifié + 0,5 pt coordonnées) (1)

c) $A$ et $B$ ont la même ordonnée $-2$, $D$ et $C$ la même ordonnée $3$ : les deux segments sont horizontaux. De $-4$ à $3$, de part et d'autre de $0$ : $AB = 4 + 3 = 7$ unités. De $-2$ à $5$ : $DC = 2 + 5 = 7$ unités. On retrouve que les côtés opposés d'un parallélogramme ont la même longueur. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

d) Sur la figure, les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en $K(0{,}5\,;\,0{,}5)$, un petit carreau (une demi-unité) à droite de l'axe des ordonnées et un au-dessus de l'axe des abscisses. Contrôle : de $A$ à $C$, on fait 9 vers la droite et 5 vers le haut ; $K$ est au milieu du trajet, 4,5 vers la droite et 2,5 vers le haut depuis $A$ : $-4 + 4{,}5 = 0{,}5$ et $-2 + 2{,}5 = 0{,}5$. Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu : $K$ est le milieu de $[BD]$, donc le symétrique de $B$ par rapport à $K$ est $D$. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

e) Un rectangle a quatre angles droits. $B(3\,;\,-2)$ et $C(5\,;\,3)$ n'ont pas la même abscisse : $[BC]$ n'est pas vertical. Or la seule direction perpendiculaire à l'horizontale $(AB)$ est la verticale : l'angle $\widehat{ABC}$ n'est pas droit, donc $ABCD$ n'est pas un rectangle. Un côté horizontal ne dit rien sur les angles. (1 pt) (1)

**Méthode** — pour placer le quatrième sommet d'un parallélogramme sur un quadrillage, je compte le déplacement de $B$ à $C$ et je le refais à partir de $A$ : on obtient deux côtés opposés parallèles et de même longueur.

## Exercice 2 – Un demi-tour qui fabrique un rectangle *(4 pts)*

a) Triangle $RST$ avec l'angle droit codé en $S$, $RS = 4$ cm et $ST = 3$ cm ; $O$ codé milieu de $[RT]$ ; $U$ placé de l'autre côté de $O$ par rapport à $S$, avec $OU = OS$ codé. $O$ est le milieu de $[RT]$, donc le symétrique de $R$ par rapport à $O$ est $T$. (0,5 pt figure + 0,5 pt symétrique) (1)

b) On sait que $O$ est le milieu de $[RT]$ et, puisque $U$ est le symétrique de $S$ par rapport à $O$, que $O$ est aussi le milieu de $[SU]$. $[RT]$ et $[SU]$ sont les diagonales de $RSTU$. Or si un quadrilatère a ses diagonales qui ont le même milieu, alors c'est un parallélogramme. Donc $RSTU$ est un parallélogramme. (1 pt) (1)

c) On sait que $RSTU$ est un parallélogramme et que $\widehat{RST} = 90°$. Or un parallélogramme qui a un angle droit est un rectangle. Donc $RSTU$ est un rectangle. Périmètre : $2 \times (4 + 3) = 14$, soit 14 cm. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

d) Les diagonales d'un rectangle ont la même longueur : $SU = RT = 5$ cm. $O$ est le milieu de $[SU]$ : $OU = 5 \div 2 = 2{,}5$ cm. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

**Erreur fréquente** — « $U$ est le symétrique de $S$ par rapport à $O$ » se traduit tout de suite par « $O$ est le milieu de $[SU]$ » : c'est souvent la donnée qui manque pour reconnaître un parallélogramme par ses diagonales.

## Exercice 3 – Qui a raison ? *(4 pts)*

a) Nora a tort. Deux points de même abscisse sont sur une même droite verticale : $(PQ)$ est parallèle à l'axe des ordonnées. (C'est la même ordonnée qui donne une droite horizontale.) (1 pt) (1)

b) Hugo a raison. Un losange est un parallélogramme ; un parallélogramme qui a un angle droit est un rectangle. Le quadrilatère est donc à la fois un losange et un rectangle : c'est un carré. (1 pt) (1)

c) Inès a tort. Il faut d'abord que les diagonales aient le même milieu. Contre-exemple : $[AC]$ et $[BD]$ perpendiculaires en $I$, avec $IA = 1$ cm, $IC = 4$ cm et $IB = ID = 2$ cm. $I$ n'est pas le milieu de $[AC]$ : $ABCD$ n'est pas un parallélogramme, donc pas un losange (c'est un « cerf-volant »). (0,5 pt réponse + 0,5 pt contre-exemple) (1)

d) Malik a tort. La symétrie centrale transforme une droite en une droite parallèle (et une droite qui passe par $O$ en elle-même), jamais en une droite perpendiculaire. (1 pt) (1)

**Piège** — des diagonales perpendiculaires ne suffisent pas pour un losange : sans le même milieu, on peut obtenir un cerf-volant.

## Exercice 4 – Un losange et ses symétries *(4 pts)*

a) Main levée : quatre côtés codés égaux, 5 cm, angle de $70°$ en $K$. Construction : je trace $[KL]$ de 5 cm ; au rapporteur, l'angle $\widehat{LKN}$ de $70°$ ; je place $N$ sur ce côté à 5 cm de $K$ ; puis $M$ au compas, avec un arc de centre $L$ et un arc de centre $N$, de rayon 5 cm. (0,5 pt main levée + 0,5 pt construction, tolérance 1 mm et $1^\circ$) (1)

b) Un losange est un parallélogramme : $I$, point d'intersection de ses diagonales, est son centre de symétrie. La symétrie de centre $I$ transforme $K$ en $M$, $L$ en $N$ et $N$ en $L$, donc l'angle $\widehat{LKN}$ en l'angle $\widehat{NML}$. Or la symétrie centrale conserve les mesures d'angles : $\widehat{LMN} = 70°$. $\widehat{KLM}$ est consécutif à $\widehat{LKN}$ : ils sont supplémentaires, donc $\widehat{KLM}$ mesure $180 - 70 = 110$, soit $110°$. (0,5 pt image et $70°$ + 0,5 pt $110°$) (1)

c) Les diagonales d'un losange sont perpendiculaires : le triangle $KIL$ est rectangle en $I$. Il n'est pas isocèle en $I$ : $IK$ et $IL$ sont les moitiés des diagonales $[KM]$ et $[LN]$. Si elles étaient égales, les diagonales auraient la même longueur et le losange serait un rectangle, donc un carré ; or son angle $\widehat{LKN}$ mesure $70°$ et non $90°$. Donc $IK \neq IL$. (0,5 pt rectangle + 0,5 pt non isocèle justifié) (1)

d) Les droites qui portent les diagonales d'un losange sont ses axes de symétrie : $(KM)$ est perpendiculaire à $[LN]$ et passe par son milieu $I$, donc le symétrique de $L$ par rapport à $(KM)$ est $N$ ; $K$ et $M$, sur l'axe, ne bougent pas. L'angle $\widehat{LKM}$ a donc pour image l'angle $\widehat{NKM}$. Or la symétrie axiale conserve les mesures d'angles : $\widehat{LKM} = \widehat{MKN}$, et chacun mesure $70 \div 2 = 35$, soit $35°$. (0,5 pt image de $L$ + 0,5 pt $35°$) (1)

**Astuce** — un losange a deux axes de symétrie (les droites qui portent ses diagonales) et un centre de symétrie (leur point d'intersection) : chacune de ces symétries donne des angles égaux sans rapporteur.

## Exercice 5 – Problème — Le massif du parc *(3 pts)*

a) $A$ et $C$ ont pour ordonnée $0$ : l'allée $[AC]$ est sur l'axe des abscisses ; $AC = 4 + 4 = 8$ m. $B$ et $D$ ont pour abscisse $0$ : l'allée $[BD]$ est sur l'axe des ordonnées ; $BD = 3 + 3 = 6$ m. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

b) $OA = OC = 4$ et $OB = OD = 3$ : $O$ est le milieu des diagonales $[AC]$ et $[BD]$, donc $ABCD$ est un parallélogramme. Ses diagonales sont portées par les deux axes du repère, qui sont perpendiculaires. Or un parallélogramme qui a ses diagonales perpendiculaires est un losange. Donc $ABCD$ est un losange. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

c) De $E$ à $O$ : 2 unités vers la droite et 1,5 vers le haut ; même trajet après $O$ : $F(2\,;\,1{,}5)$. $O$ est le centre de symétrie du losange : le symétrique de $A$ est $C$, celui de $D$ est $B$, donc celui du bord $[AD]$ est le bord $[CB]$. Or la symétrie centrale conserve les milieux : $F$ est le milieu de $[CB]$. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

**Piège** — on ne se fie pas au dessin : ce sont les coordonnées (abscisse 0, ordonnée 0) qui prouvent que les allées sont sur les axes, donc perpendiculaires.

*Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).*