Corrigé et barème – symétrie centrale et parallélogrammes — niveau ★

Durée : 55 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 5e

Exercice 1 – Placer, puis faire un demi-tour *(4 pts)*

a) A : 4 unités vers la droite, puis 1 vers le haut ; B : 2 vers la gauche, puis 3 vers le haut ; C : 5 vers le bas, sur l'axe vertical ; D : 3 vers la gauche, sur l'axe horizontal. C a pour abscisse 0 : il est sur l'axe des ordonnées. D a pour ordonnée 0 : il est sur l'axe des abscisses. A et B ne sont sur aucun axe. (0,5 pt pour les quatre points + 0,5 pt pour les axes) (1)

b) Pour aller de A à O : 4 unités vers la gauche et 1 vers le bas. Je refais le même trajet à partir de O : A' est 4 unités à gauche et 1 unité au-dessous de O, donc $A'(-4\,;\,-1)$. Contrôle : O est bien le milieu de $[AA']$. (0,5 pt trajet + 0,5 pt coordonnées) (1)

c) De B à O : 2 unités vers la droite et 3 vers le bas. Même trajet à partir de O : $B'(2\,;\,-3)$. (1 pt) (1)

d) $[A'B']$ est le symétrique de $[AB]$ par rapport à O. Or la symétrie centrale conserve les longueurs, donc $A'B' = AB$. Et le symétrique d'une droite par une symétrie centrale est une droite parallèle : $(A'B') // (AB)$. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

Erreur fréquente — après O, on continue dans le même sens : si l'on va vers la gauche et vers le bas pour atteindre O, on continue vers la gauche et vers le bas ; revenir en arrière ramène au point de départ.

Exercice 2 – Axes et centres de symétrie *(4 pts)*

a) 2 axes : les médiatrices de ses côtés (pas ses diagonales). Il a un centre de symétrie : le point d'intersection de ses diagonales. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

b) 3 axes : chacun passe par un sommet et le milieu du côté opposé. Aucun centre de symétrie : après un demi-tour, la pointe du haut se retrouve en bas. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

c) Aucun axe : en pliant, les deux moitiés ne se superposent jamais. Il a un centre de symétrie : le point d'intersection de ses diagonales, qui est leur milieu commun. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

d) 2 axes : la médiatrice de $[MN]$ et la droite (MN). Un centre de symétrie : le milieu de $[MN]$. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

Piège — avoir des axes ne donne pas un centre (le triangle équilatéral en a trois et n'a pas de centre), et avoir un centre ne donne pas d'axe (le parallélogramme quelconque).

Exercice 3 – Calculer dans un parallélogramme *(4 pts)*

a) K est le centre de symétrie du parallélogramme : la symétrie de centre K transforme E en G et F en H, donc $[EF]$ en $[GH]$. Or la symétrie centrale conserve les longueurs : $GH = EF = 6{,}4$ cm. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

b) Une longueur et une largeur font la moitié du périmètre : $19{,}8 \div 2 = 9{,}9$ cm. Donc $FG = 9{,}9 - 6{,}4 = 3{,}5$ cm. (1 pt ; 0,5 pt si l'élève fait $19{,}8 - 6{,}4$ sans penser aux deux côtés de chaque sorte) (1)

c) $\widehat{GHE}$ est opposé à $\widehat{EFG}$: il mesure aussi $115°$. $\widehat{HEF}$ est consécutif à $\widehat{EFG}$: ils sont supplémentaires, donc $\widehat{HEF}$ mesure $180 - 115 = 65$, soit $65°$. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

d) Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu : K est le milieu de $[EG]$, donc $EG = 2 \times 4{,}25 = 8{,}5$ cm. (1 pt) (1)

Méthode — angle opposé : même mesure ; angle consécutif (voisin) : 180° moins la mesure connue ; contrôle, les quatre angles font $115 + 65 + 115 + 65 = 360$ degrés.

Exercice 4 – Quelle est sa nature ? *(4 pts)*

a) On sait que les côtés opposés de $MNPQ$ sont parallèles deux à deux : c'est un parallélogramme (définition). On sait aussi que deux côtés consécutifs, $[MN]$ et $[NP]$, ont la même longueur. Or un parallélogramme qui a deux côtés consécutifs de même longueur est un losange. Donc $MNPQ$ est un losange. (0,5 pt parallélogramme + 0,5 pt losange) (1)

b) On sait que les diagonales de $RSTU$ ont le même milieu : c'est un parallélogramme. Elles ont aussi la même longueur. Or un parallélogramme qui a des diagonales de même longueur est un rectangle. Donc $RSTU$ est un rectangle. (1 pt) (1)

c) On sait que $VWXY$ a quatre côtés de même longueur : c'est un losange. On sait aussi qu'il a un angle droit. Or un losange qui a un angle droit est un carré. Donc $VWXY$ est un carré. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

d) On sait que $ABCD$ a trois angles droits. Or un quadrilatère qui a trois angles droits est un rectangle. Donc $ABCD$ est un rectangle. Ce n'est pas un carré : deux côtés consécutifs, $AB = 5$ cm et $BC = 3$ cm, n'ont pas la même longueur. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

Méthode — je cherche d'abord la famille (parallélogramme, rectangle, losange), puis la propriété qui suffit, et je rédige en trois temps : on sait que… ; or… ; donc… .

Exercice 5 – Construire un rectangle avec ses diagonales *(4 pts)*

a) Un quadrilatère $ABCD$ avec ses deux diagonales qui se coupent en O ; le même trait sur les quatre demi-diagonales $[OA]$, $[OB]$, $[OC]$, $[OD]$; $AC = 8$ cm écrit ; l'angle $\widehat{AOB}$ marqué $130°$. (0,5 pt codage des demi-diagonales + 0,5 pt données) (1)

b) Je trace $[AC]$ de 8 cm et je place son milieu O ($OA = 4$ cm) ; au rapporteur, je trace une demi-droite d'origine O qui fait un angle de $130°$ avec $[OA)$ et j'y place B à 4 cm de O ; je prolonge au-delà de O et je place D à 4 cm de O, de l'autre côté ; je trace $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$. Les diagonales ont la même longueur et le même milieu : c'est bien un rectangle. (1 pt, tolérance 1 mm et 1°) (1)

c) Les diagonales d'un rectangle ont la même longueur : $BD = AC = 8$ cm. Elles se coupent en leur milieu : $OB = 8 \div 2 = 4$ cm. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

d) O est le milieu de $[AC]$, donc $OA = 8 \div 2 = 4$ cm, et $OB = 4$ cm. Comme $OA = OB$, le triangle AOB est isocèle en O. La symétrie de centre O transforme A en C, B en D et laisse O à sa place : l'angle $\widehat{COD}$ est le symétrique de l'angle $\widehat{AOB}$. Or la symétrie centrale conserve les mesures d'angles, donc $\widehat{COD} = 130°$. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

Astuce — pour un rectangle, les quatre demi-diagonales ont la même longueur : les quatre sommets sont à la même distance du centre.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).