

Corrigé et barème – Proportionnalité, pourcentages et fonctions — niveau ★★★

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 5^e

Exercice 1 – Automatismes justifiés

(3 pts)

- a) Coefficient : $7,2 \div 12 = 0,6$ (car $12 \times 0,6 = 7,2$). Or $10,2 = 7,2 + 3$ et $3 = 0,6 \times 5$: il correspond à $12 + 5 = 17$; vérification $17 \times 0,6 = 10,2$ (1 pt : 0,5 raisonnement + 0,5 résultat). (1)
- b) 10 % de 60 font 6, donc 30 % font 18 ; 5 % font la moitié de 6, soit 3 ; 35 % de 60 font $18 + 3 = 21$ (1 pt : 0,5 décomposition + 0,5 résultat). (1)
- c) $4 \times 7 - 3 = 28 - 3 = 25$: oui, le point est sur le graphique. Pour $x = 0$, $y = -3 \neq 0$: le graphique ne passe pas par l'origine, la situation n'est pas proportionnelle (1 pt : 0,5 + 0,5). (1)

Astuce — sans calculatrice, un pourcentage se reconstruit à partir de 10 % (diviser par 10) et de 5 % (sa moitié) : 35 %, c'est $3 \times 10 \% + 5 \%$.

Exercice 2 – Vitesses et débits sans calculatrice

(4 pts)

- a) $12 \text{ min} = \frac{12}{60} \text{ h} = 0,2 \text{ h}$, donc $1 \text{ h } 12 \text{ min} = 1,2 \text{ h}$; $300 \times 1,2 = 360 \text{ km}$ (1 pt : 0,5 conversion + 0,5 calcul). (1)
- b) $72 \text{ km/h} = 72\,000 \text{ m}$ en $3\,600 \text{ s}$; $72\,000 \div 3\,600 = 20 \text{ m/s}$ (1 pt : 0,5 conversions + 0,5 résultat). (1)
- c) $1,8 \text{ m}^3 = 1\,800 \text{ L}$; $1\,800 \div 12 = 150 \text{ min} = 2 \text{ h } 30 \text{ min}$ (1 pt : 0,5 conversion + 0,5 durée). (1)
- d) Débit total : $12 + 8 = 20 \text{ L/min}$, donc $V = 20 \times t$. $20 \times t = 1\,800$ donne $t = 90 \text{ min} = 1 \text{ h } 30 \text{ min}$ (1 pt : 0,5 formule + 0,5 durée). (1)

Erreur fréquente — 1 h 12 min n'est pas 1,12 h : les minutes se comptent en soixantièmes d'heure, et 12 min valent 0,2 h.

Exercice 3 – Recherche — la recette

(4 pts)

- a) Pour 1 personne : $6 \div 4 = 1,5$ œuf et $250 \div 4 = 62,5 \text{ g}$. Donc $E = 1,5 \times p$ et $F = 62,5 \times p$ (1 pt : 0,5 par formule). (1,33333)
- b) $E = p + \frac{p}{2}$: p est entier, donc E est entier exactement quand $\frac{p}{2}$ l'est, c'est-à-dire quand p est pair. Solutions : $p = 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20$, soit 10 valeurs ; tout p impair donne un nombre d'œufs se terminant par , 5 (1,5 pt : 0,5 critère + 0,5 liste + 0,5 justification de l'exhaustivité). (1,33333)
- c) Pour $p = 1$ à 8 : $F = 62,5 ; 125 ; 187,5 ; 250 ; 312,5 ; 375 ; 437,5 ; 500$: seul $p = 8$ convient. Ajouter 8 personnes ajoute $8 \times 62,5 = 500 \text{ g}$, un multiple de 100 : pour p de 9 à 16, on retrouve les valeurs précédentes augmentées de 500, donc seul $p = 16$ (1 000 g) convient ; pour p de 17 à 20, F vaut 1 000 g plus $62,5 ; 125 ; 187,5 ; 250$: aucun multiple de 100. Solutions : $p = 8$ et $p = 16$ (1,5 pt : 0,5 premières valeurs + 0,5 argument de répétition + 0,5 conclusion). (1,33333)

Méthode — pour être sûr de n'oublier aucune solution, on repère un motif qui se répète (ici toutes les 8 personnes) : il suffit alors d'étudier un seul « bloc » de valeurs.

Exercice 4 – Problème — la poursuite*(4 pts)*

- a) 12 km en 60 min, soit $12 \div 60 = 0,2$ km par minute : $d_A = 0,2 \times t$ (1 pt : 0,5 vitesse par minute + 0,5 formule). (1)
- b) Bruno fait $15 \div 60 = 0,25$ km par minute et court depuis $t - 10$ minutes. $t = 20 : 0,25 \times 10 = 2,5$ km ; $t = 30 : 0,25 \times 20 = 5$ km ; $t = 40 : 0,25 \times 30 = 7,5$ km (1 pt : 0,5 raisonnement + 0,5 valeurs). (1)
- c) Au départ de Bruno ($t = 10$), Alice a $0,2 \times 10 = 2$ km d'avance. Chaque minute, Bruno reprend $0,25 - 0,2 = 0,05$ km, soit 50 m ; il lui faut $2 \div 0,05 = 40$ min. Il la rattrape à $t = 10 + 40 = 50$ min, à $0,2 \times 50 = 10$ km du départ (vérification : $0,25 \times 40 = 10$ km) (1,5 pt : 0,5 avance + 0,5 durée + 0,5 instant et distance). (1)
- d) Non : pour $t = 20$, 2,5 km, et pour $t = 40$, 7,5 km ; le temps double mais la distance est multipliée par 3 (0,5 pt). (1)

Piège — Bruno ne court pas depuis t minutes mais depuis $t - 10$ minutes : oublier ce décalage fausse toutes ses distances et l'instant de la rencontre.

Exercice 5 – Pour aller plus loin*(5 pts)*

- a) $20 = 7 + 13$, donc 20 correspond à $17,5 + 32,5 = 50$. $6 = 13 - 7$, donc 6 correspond à $32,5 - 17,5 = 15$ (1 pt : 0,5 par valeur). (1,25)
- b) Par distributivité : $k \times a + k \times b = k \times (a + b)$, qui est bien l'image de $a + b$ (1,5 pt : 0,5 écriture de la somme + 1 utilisation justifiée de la distributivité). (1,25)
- c) Pour $x = 1 : y = 5$; pour $x = 2 : y = 7$; somme des images : 12. Pour $x = 1 + 2 = 3 : y = 2 \times 3 + 3 = 9 \neq 12$ (1 pt : 0,5 calculs + 0,5 conclusion). (1,25)
- d) Somme des images de a et b : $(2 \times a + 3) + (2 \times b + 3) = 2 \times a + 2 \times b + 6 = 2 \times (a + b) + 6$. Image de $a + b$: $2 \times (a + b) + 3$. La différence vaut $6 - 3 = 3$ pour tous a et b (1,5 pt : 0,5 somme réduite + 0,5 image de la somme + 0,5 conclusion générale). (1,25)

Astuce — dans un tableau de proportionnalité, on peut additionner ou soustraire deux colonnes pour en obtenir une nouvelle : c'est la distributivité $k \times (a + b) = k \times a + k \times b$ en action.