

Corrigé et barème – Fractions et priorités opératoires — niveau ★★★

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 5^e

Exercice 1 – Automatismes justifiés

(3 pts)

- a) Vrai. Numérateur : $3 + 35 = 38$; dénominateur : 38 ; donc $\frac{38}{38} = 1$. (1 pt : 0,5 priorité dans le numérateur, 0,5 conclusion) (1)
- b) Faux. $2 + 3 + 4 = 9$ et $3 + 1 + 5 = 9$: les deux nombres sont divisibles par 9, et $\frac{234}{315} = \frac{26}{35}$. (1 pt : 0,5 critère de divisibilité par 9, 0,5 simplification) (1)
- c) Vrai. $\frac{3}{6} + \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1$. (1 pt : 0,5 dénominateur commun, 0,5 conclusion) (1)

Astuce — pour réfuter « irréductible », il suffit d'exhiber un diviseur commun ; la somme des chiffres donne en un coup d'œil la divisibilité par 3 et par 9.

Exercice 2 – Calculs longs sans calculatrice

(5 pts)

- a) Parenthèse : $14 - 12 = 2$; crochet : $3 + 2 \times 2 = 7$; donc $5 \times 7 = 35$. Fraction : $\frac{36}{4+8} = \frac{36}{12} = 3$.
 $J = 35 - 3 = 32$. (1,5 pt : 0,5 crochet, 0,5 fraction, 0,5 résultat) (1,25)
- b) $L = (100 - 2) \times 45 = 100 \times 45 - 2 \times 45 = 4\,500 - 90 = 4\,410$. (1 pt : 0,5 distributivité, 0,5 résultat) (1,25)
- c) Dénominateur commun 72 : $\frac{30}{72} + \frac{28}{72} - \frac{15}{72} = \frac{43}{72}$, irréductible car 43 n'a pas d'autre diviseur que 1 et 43, et 43 ne divise pas 72. (1 pt : 0,5 conversions, 0,5 résultat) (1,25)
- d) $\frac{22}{12} - \frac{9}{12} = \frac{13}{12}$; $\frac{13}{12} \times 12 = 13$; $3 \times \frac{5}{9} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$; $N = \frac{39}{3} - \frac{5}{3} = \frac{34}{3}$. (1,5 pt : 0,5 parenthèse, 0,5 les deux produits, 0,5 résultat) (1,25)

Méthode — le plus petit dénominateur commun de 12, 18 et 24 est 72 : prendre le produit des dénominateurs donnerait des nombres énormes et une simplification pénible.

Exercice 3 – Recherche — toutes les solutions

(4 pts)

- a) $\frac{5}{8} = \frac{15}{24}$ et $\frac{5}{6} = \frac{20}{24}$. Il faut $15 < n < 20$: $n \in \{16; 17; 18; 19\}$, et ce sont les seuls entiers possibles.
 $\frac{8}{16} = \frac{2}{4}$ et $\frac{6}{18} = \frac{2}{3}$ se simplifient ; $\frac{17}{24}$ et $\frac{19}{24}$ sont irréductibles. (2 pts : 0,5 conversions, 0,5 liste, 0,5 justification de l'exhaustivité, 0,5 irréductibles) (1,33333)
- b) Si le quotient est entier, $3\square 0$ est un multiple de $45 = 9 \times 5$, donc de 9 : $3 + \square + 0$ doit valoir 9 ou 18.
. $\square = 6$ convient ; $\square = 15$ n'est pas un chiffre. Vérification : $\frac{360}{45} = 8$. Seule solution : 6. (1 pt : 0,5 critère de divisibilité par 9, 0,5 unicité et vérification) (1,33333)
- c) $(3 + 9) \div 3 \times (2 + 4) = 12 \div 3 \times 6 = 4 \times 6 = 24$. (1 pt : 0,5 placement, 0,5 vérification de gauche à droite) (1,33333)

Méthode — pour être sûr de n'oublier aucune solution, on traduit la condition par un encadrement ou une liste finie de cas, puis on les examine tous un par un.

Exercice 4 – Problème — le carton du libraire

(4 pts)

- a) $1 - \frac{2}{7} = \frac{7}{7} - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$. (0,5 pt) (1)
- b) On partage le carton en 7 parts égales : il en reste 5 après le premier jour. Les $\frac{3}{5}$ de ces 5 parts font 3 parts vendues le deuxième jour ; il reste $5 - 3 = 2$ parts, soit 48 livres. Une part vaut $48 \div 2 = 24$ livres, et le carton en contient $7 \times 24 = 168$. (2 pts : 1 pour le raisonnement en parts, 0,5 pour la part de 24, 0,5 pour 168) (1)
- c) Jour 1 : $168 \div 7 \times 2 = 48$ livres ; reste 120. Jour 2 : $120 \div 5 \times 3 = 72$ livres ; reste $120 - 72 = 48$. (1 pt : 0,5 par jour) (1)
- d) $\frac{72}{168} = \frac{72 \div 24}{168 \div 24} = \frac{3}{7}$. Comme $\frac{3}{7} > \frac{2}{7}$, il a vendu davantage le deuxième jour. (0,5 pt) (1)

Astuce — découper le tout en parts égales transforme un problème de « fraction du reste » en un simple calcul sur des entiers, sans aucune équation.

Exercice 5 – Pour aller plus loin

(4 pts)

- a) $\frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6} = \frac{1}{2 \times 3}$ et $\frac{4}{12} - \frac{3}{12} = \frac{1}{12} = \frac{1}{3 \times 4}$. (1 pt : 0,5 par égalité) (1)
- b) Avec le dénominateur commun $n \times (n + 1)$: $\frac{1}{n} = \frac{n + 1}{n \times (n + 1)}$ et $\frac{1}{n + 1} = \frac{n}{n \times (n + 1)}$. La différence des numérateurs vaut $(n + 1) - n = 1$, d'où l'égalité. (1 pt : 0,5 dénominateur commun, 0,5 différence des numérateurs) (1)
- c) $\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$, $\frac{1}{6} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$, $\frac{1}{12} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$, $\frac{1}{20} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$, $\frac{1}{30} = \frac{1}{5} - \frac{1}{6}$. En additionnant, les termes intermédiaires s'annulent : $S = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$. (1 pt : 0,5 réécriture, 0,5 résultat) (1)
- d) Avec k termes, le même raisonnement donne $1 - \frac{1}{k + 1}$. Il faut $\frac{1}{k + 1} = \frac{1}{20}$, donc $k + 1 = 20 : 19$ termes au total, le dernier étant $\frac{1}{19 \times 20} = \frac{1}{380}$. (1 pt : 0,5 nombre de termes, 0,5 dernier terme) (1)

Erreur fréquente — on croit souvent qu'une telle somme exige un dénominateur commun gigantesque : écrire chaque terme comme une différence fait disparaître presque tout, c'est l'idée clé du défi.