Corrigé et barème – simplification, comparaison et calcul de fractions — niveau ★★★

Durée : 55 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 5e

Exercice 1 – Enquête — Fractions mystères *(4 pts)*

a) $\frac{5}{12} = \frac{15}{36}$ et $\frac{5}{9} = \frac{20}{36}$: le numérateur est 16, 17, 18 ou 19. Or $\frac{16}{36} = \frac{4}{9}$ (on divise par 4) et $\frac{18}{36} = \frac{1}{2}$ (on divise par 18) ne sont pas irréductibles. Les diviseurs de 36 sont 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 et 36 ; ni 17 ni 19 n'est divisible par l'un d'eux, sauf 1. Il y a deux possibilités : $\frac{17}{36}$ et $\frac{19}{36}$. (1 pt pour les conversions et la liste + 1 pt pour l'élimination justifiée) (1,33333)

b) Les fractions égales à $\frac{3}{4}$ s'obtiennent en multipliant 3 et 4 par un même nombre : $\frac{6}{8}$, $\frac{9}{12}$, $\frac{12}{16}\ldots$ La somme des deux termes vaut 7, puis 14, 21, 28 : c'est 7 fois le nombre par lequel on a multiplié. Comme $42 = 7 \times 6$, on multiplie par 6 : $\frac{3 \times 6}{4 \times 6} = \frac{18}{24}$. Vérification : $18 + 24 = 42$ et $\frac{18}{24} = \frac{3}{4}$ (on divise par 6). (1 pt ; 0,5 pt pour la bonne fraction trouvée par essais sans explication) (1,33333)

c) Non. D'après la question précédente, la somme des deux termes d'une fraction égale à $\frac{3}{4}$ est toujours dans la table de 7 : 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56… Or $50 = 7 \times 7 + 1$ n'est pas dans la table de 7 : aucune fraction ne convient. (1 pt) (1,33333)

Méthode — les fractions égales à $\frac{3}{4}$ sont $\frac{6}{8}$, $\frac{9}{12}$, $\frac{12}{16}\ldots$: le numérateur avance de 3 en 3, le dénominateur de 4 en 4, donc leur somme de 7 en 7.

Exercice 2 – Corriger une copie *(4 pts)*

a) La mise au même dénominateur et la soustraction sont justes ; l'erreur est dans la simplification : en divisant 3 et 6 par 3, on obtient $\frac{1}{2}$, pas $\frac{1}{3}$. Résultat : $\frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$. Contrôle : $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$, et non $\frac{3}{6}$. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

b) L'élève a multiplié aussi le dénominateur par 3 : $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$ (on divise par 3), il a donc écrit une fraction égale à celle de départ, qui n'a pas été triplée. On multiplie seulement le numérateur : $3 \times \frac{5}{12} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$ (on divise par 3). Contrôle : $\frac{5}{12} + \frac{5}{12} + \frac{5}{12} = \frac{15}{12}$. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

c) Le reste de la division de 22 par 6 est faux : $22 = 6 \times 3 + 4$, il reste 4 et non 2. Donc $\frac{22}{6} = 3 + \frac{4}{6} = 3 + \frac{2}{3}$. Contrôle : $3 + \frac{2}{6} = \frac{18}{6} + \frac{2}{6} = \frac{20}{6}$, et non $\frac{22}{6}$. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

d) L'addition est juste, mais elle n'a pas de sens : les $\frac{5}{6}$ portent sur ce qui reste, pas sur les 90 €, et $\frac{37}{30}$ est plus grand que 1 (Léo aurait dépensé plus que tout son argent). Calcul correct : $90 \div 5 = 18$, puis $18 \times 2 = 36$ € ; il reste $90 - 36 = 54$ €. Ensuite $54 \div 6 = 9$, puis $9 \times 5 = 45$ €. Il a dépensé $36 + 45 = 81$ €, soit $\frac{81}{90} = \frac{9}{10}$ de son argent (on divise par 9). (0,5 pt pour l'erreur + 0,5 pt pour $\frac{9}{10}$) (1)

Astuce — un contrôle rapide démasque beaucoup d'erreurs : multiplier une fraction par 3 doit la rendre 3 fois plus grande, et une part d'un tout ne peut pas dépasser 1.

Exercice 3 – Comparer en réfléchissant *(4 pts)*

a) $1 - \dfrac{17}{18} = \dfrac{18}{18} - \dfrac{17}{18} = \dfrac{1}{18}$ et $1 - \dfrac{18}{19} = \dfrac{19}{19} - \dfrac{18}{19} = \dfrac{1}{19}$. Même numérateur : $\dfrac{1}{18} > \dfrac{1}{19}$, car un dix-huitième est plus gros qu'un dix-neuvième. Il manque donc davantage à $\dfrac{17}{18}$ pour atteindre 1 : $\dfrac{17}{18} < \dfrac{18}{19}$. (0,5 pt pour les deux différences + 0,5 pt pour leur comparaison + 0,5 pt pour la conclusion) (1,33333)

b) Même dénominateur : $4 < 7$, donc $\dfrac{4}{11} < \dfrac{7}{11}$. Même numérateur : un dixième est plus gros qu'un onzième, donc $\dfrac{7}{11} < \dfrac{7}{10}$. Comparaison à 1 : $7 < 10$, donc $\dfrac{7}{10} < 1$, et $13 > 10$, donc $\dfrac{13}{10} > 1$. D'où $\dfrac{4}{11} < \dfrac{7}{11} < \dfrac{7}{10} < 1 < \dfrac{13}{10}$. (0,5 pt pour les trois justifications + 0,5 pt pour le rangement) (1,33333)

c) Table de 12 : 12, 24, 36 ; et $36 = 9 \times 4$. Donc $\dfrac{7}{9} = \dfrac{7 \times 4}{9 \times 4} = \dfrac{28}{36}$, et une fraction de dénominateur 12 s'écrit en trente-sixièmes en multipliant ses deux termes par 3. $\dfrac{9}{12} = \dfrac{27}{36}$ est trop petite ($27 < 28$), et toutes les fractions $\dfrac{1}{12}$, $\dfrac{2}{12}$… avant elle aussi ; $\dfrac{10}{12} = \dfrac{30}{36}$ convient ($30 > 28$). Le plus petit entier est $n = 10$. (1 pt pour la mise au dénominateur 36 + 0,5 pt pour $n = 10$) (1,33333)

Astuce — deux fractions proches de 1 se comparent par ce qui leur manque pour atteindre 1 : plus il manque, plus la fraction est petite.

Exercice 4 – Problème — La citerne *(4 pts)*

a) Mardi, on utilise les $\dfrac{2}{3}$ de l'eau de lundi soir : il en reste $\dfrac{3}{3} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$. Donc $\dfrac{1}{3}$ de l'eau de lundi soir vaut 150 L, et l'eau de lundi soir compte 3 parts de 150 L : $150 \times 3 = 450$ L. (1 pt) (1)

b) Lundi, on utilise $\dfrac{1}{4}$ de la citerne pleine : il en reste $\dfrac{3}{4}$, qui valent 450 L. Un quart vaut $450 \div 3 = 150$ L, et la citerne pleine compte 4 quarts : $150 \times 4 = 600$ L. Contrôle : le quart de 600 L vaut 150 L, et $600 - 150 = 450$ L. (1 pt) (1)

c) Mardi : $450 - 150 = 300$ L, sur une capacité de 600 L : $\dfrac{300}{600} = \dfrac{1}{2}$ (on divise par 300). Ce n'est pas $\dfrac{2}{3}$ de la citerne : les $\dfrac{2}{3}$ portaient sur l'eau restante. (1 pt) (1)

d) En litres : $\dfrac{3}{10}$ de 600 L, c'est $600 \div 10 = 60$, puis $60 \times 3 = 180$ L ; or il ne reste que 150 L : c'est impossible, il manquerait 30 L. Avec des fractions : il reste $\dfrac{150}{600} = \dfrac{1}{4}$ de la citerne ; au dénominateur 20, $\dfrac{1}{4} = \dfrac{5}{20}$ et $\dfrac{3}{10} = \dfrac{6}{20}$; comme $5 < 6$, il ne reste pas assez d'eau. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

Erreur fréquente — les $\dfrac{2}{3}$ « de l'eau qui reste » ne sont pas les $\dfrac{2}{3}$ de la citerne : on raisonne sur les quantités en litres, étape par étape, en partant de la fin si besoin.

Exercice 5 – Demi-droite à reconstruire *(4 pts)*

a) Non. En huitièmes, B est bien sur une graduation, car $\frac{5}{4} = \frac{10}{8}$. Mais pas A : au dénominateur 24, $\frac{5}{8} = \frac{15}{24}$, $\frac{2}{3} = \frac{16}{24}$ et $\frac{6}{8} = \frac{18}{24}$, donc A tombe strictement entre les graduations $\frac{5}{8}$ et $\frac{6}{8}$. On peut aussi dire : 8 n'est pas dans la table de 3, donc $\frac{2}{3}$ ne s'écrit pas avec le dénominateur 8. (1 pt) (1)

b) Pour que A soit sur une graduation, il faut pouvoir écrire $\frac{2}{3}$ avec ce dénominateur : il doit être dans la table de 3 ; pour B, il doit être dans la table de 4. Table de 4 : 4, 8, 12 ; le premier qui est aussi dans la table de 3 est 12. Il faut au moins 12 intervalles par unité. (1 pt) (1)

c) $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$ et $\frac{5}{4} = \frac{15}{12}$: A est à 8 intervalles de O et B à 15. Ils sont séparés par $15 - 8 = 7$ intervalles, et l'écart vaut $\frac{15}{12} - \frac{8}{12} = \frac{7}{12}$. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

d) D est 7 intervalles après B : $\frac{15}{12} + \frac{7}{12} = \frac{22}{12} = \frac{11}{6}$ (on divise par 2). Comme $11 = 6 \times 1 + 5$, on a $\frac{11}{6} = 1 + \frac{5}{6}$, donc $1 < \frac{11}{6} < 2$. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

Piège — un point d'abscisse $\frac{2}{3}$ n'est sur une graduation que si le nombre d'intervalles par unité est dans la table de 3 : ce nombre doit être un multiple commun à tous les dénominateurs.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).