

Corrigé et barème – Calcul littéral, carrés et cubes — niveau



Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 5^e

Exercice 1 – Calculs sans calculatrice

(4 pts)

- a) $A = 3 \times [8 - 3^2 + 16] = 3 \times [8 - 9 + 16] = 3 \times 15 = 45$. (0,5 pt pour le crochet, 0,5 pt pour le résultat) (1)
- b) Numérateur : $25 + 27 - 2 = 50$; dénominateur : $2,25 - 0,25 = 2$; $B = \frac{50}{2} = 25$. (0,5 pt pour numérateur et dénominateur, 0,5 pt pour le résultat) (1)
- c) $C = 7 \times 3^2 - 2 \times 3^3 = 7 \times 9 - 2 \times 27 = 63 - 54 = 9$. (0,5 pt pour le remplacement, 0,5 pt pour le résultat) (1)
- d) $0,5^2 = 0,25$ et $0,5^3 = 0,25 \times 0,5 = 0,125$; $D = 2 \times 0,125 + 0,25 = 0,25 + 0,25 = 0,5$. (0,5 pt pour les puissances, 0,5 pt pour le résultat) (1)

Méthode — avec des crochets, on calcule de l'intérieur vers l'extérieur ; avec un trait de fraction, le numérateur et le dénominateur se calculent séparément, comme s'ils étaient entre parenthèses.

Exercice 2 – Qui a raison ?

(4 pts)

- a) Vrai : $3(x + 4) - 2x - 12 = 3x + 12 - 2x - 12 = x$, et ce calcul est valable pour tout nombre x . (0,5 pt pour le développement, 0,5 pt pour la conclusion) (1)
- b) Faux : pour 0,5, on a $0,5^2 = 0,25$, qui est inférieur à 0,5. (0,5 pt pour la réponse, 0,5 pt pour le contre-exemple) (1)
- c) Faux : $1^2 = 1$ et $1^3 = 1$; de même, $0^2 = 0^3 = 0$. (0,5 pt pour la réponse, 0,5 pt pour le contre-exemple) (1)
- d) Vrai : $4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$ et $64 = 8 \times 8 = 8^2$. (0,5 pt pour 64, 0,5 pt pour 8^2) (1)

Astuce — pour chercher un contre-exemple, pense d'abord aux nombres particuliers : 0, 1 et les décimaux compris entre 0 et 1, dont le carré est plus petit qu'eux.

Exercice 3 – Recherche — toutes les solutions

(4 pts)

- a) $4^2 + 3 \times 4 = 16 + 12 = 28$; $6^2 + 3 \times 6 = 36 + 18 = 54$. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)
- b) Quand n augmente, $n^2 = n \times n$ augmente (produit de deux nombres positifs plus grands) et $3n$ augmente aussi ; leur somme augmente donc. (1 pt) (1)
- c) On teste dans l'ordre : $n = 0$ donne 0 ; $n = 1$ donne 4 ; $n = 2$ donne 10 ; $n = 3$ donne 18 ; $n = 4$ donne 28 ; $n = 5$ donne 40 ; $n = 6$ donne 54 ; $n = 7$ donne $49 + 21 = 70$. Dès $n = 7$ on dépasse 60, et d'après la question 2 toutes les valeurs suivantes dépassent aussi 60. Les solutions sont 0, 1, 2, 3, 4, 5 et 6, soit 7 entiers. (1 pt pour la liste, 0,5 pt pour la justification de l'arrêt) (1)
- d) Non : $n = 6$ donne 54 et $n = 7$ donne 70 ; comme l'expression augmente avec n , aucun entier ne donne exactement 60. (0,5 pt) (1)

Méthode — pour ne rien oublier, on teste les entiers dans l'ordre et on justifie l'arrêt : si l'expression augmente avec n , dès qu'une valeur dépasse la borne, toutes les suivantes la dépassent aussi.

Exercice 4 – Problème — l’allée autour de la cour**(4 pts)**

- a) L’allée se découpe en 4 rectangles de x m sur 1 m, le long des côtés, et 4 carrés de 1 m de côté, aux coins. Son aire vaut $4 \times x \times 1 + 4 \times 1^2 = 4x + 4$ (en m^2). (1 pt pour le découpage, 0,5 pt pour l’expression) (1)
- b) Avec l’expression : $4 \times 12 + 4 = 48 + 4 = 52 \text{ m}^2$. Autrement : le grand carré a pour côté $12 + 2 = 14$ m, donc l’allée mesure $14^2 - 12^2 = 196 - 144 = 52 \text{ m}^2$. (0,5 pt par méthode) (1)
- c) Une dalle a pour aire $0,5^2 = 0,25 \text{ m}^2$; il en faut $52 \div 0,25 = 52 \times 4 = 208$. (0,5 pt pour l’aire d’une dalle, 0,5 pt pour le nombre de dalles) (1)
- d) $9^2 = 81$, donc le côté de la cour vaut $x = 9$ m ; l’allée a pour aire $4 \times 9 + 4 = 40 \text{ m}^2$. (0,5 pt) (1)

Astuce — découper une figure en morceaux simples fournit une expression ; calculer la même aire d’une seconde manière, ici par différence de deux carrés, permet de contrôler le résultat.

Exercice 5 – Pour aller plus loin — sommes de cubes**(4 pts)**

- a) $1 + 8 = 9 = 3^2$; $9 + 27 = 36 = 6^2$; $36 + 64 = 100 = 10^2$. (0,5 pt pour les sommes, 0,5 pt pour les carrés) (1)
- b) $1 + 2 = 3$, $3 + 3 = 6$, $6 + 4 = 10$: on ajoute 2, puis 3, puis 4. Le nombre suivant est $10 + 5 = 15$, d’où la prévision $15^2 = 225$. Vérification : $100 + 5^3 = 100 + 125 = 225$. (0,5 pt pour la prévision, 0,5 pt pour la vérification) (1)
- c) Pour $n = 4$: $\frac{4 \times 5}{2} = \frac{20}{2} = 10$, c’est bien le 4e nombre. Pour $n = 5$: $\frac{5 \times 6}{2} = \frac{30}{2} = 15$, c’est bien le 5e. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)
- d) Pour $n = 10$: $\frac{10 \times 11}{2} = 55$, donc la somme vaut $55^2 = 55 \times 55 = 3\,025$. Ce n’est pas une preuve : la régularité n’a été vérifiée que sur quelques cas et la formule a été admise sans être démontrée. (0,5 pt pour le calcul, 0,5 pt pour l’explication) (1)

Piège — une régularité observée sur quelques exemples n’est qu’une conjecture : elle ne devient une propriété qu’une fois démontrée pour tous les cas.