

Corrigé et barème – Angles, triangles et parallélogrammes

— niveau ★★★

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 5°

Exercice 1 – Qui a raison ?

(3 pts)

- Léa a raison (0,5 pt). Dans un triangle ABC , l'angle supplémentaire en A mesure $180^\circ - \hat{A}$; or $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ donne $180^\circ - \hat{A} = \hat{B} + \hat{C}$ (0,5 pt). (1)
- Tom a tort (0,5 pt). Contre-exemple : deux segments $[AC]$ et $[BD]$ de 6 cm, perpendiculaires, qui se coupent au milieu de $[BD]$ mais à 1 cm de A ; les diagonales de $ABCD$ ont la même longueur mais ne se coupent pas en leur milieu, donc $ABCD$ n'est même pas un parallélogramme (0,5 pt). (1)
- Inès a tort (0,5 pt). Le centre O est le milieu de chaque diagonale : $OA = OC$ et $OB = OD$, mais $OA = OB$ seulement si les diagonales ont la même longueur, c'est-à-dire si le parallélogramme est un rectangle ; dans un losange non carré, par exemple, c'est faux (0,5 pt). (1)

Méthode — pour réfuter une affirmation générale, un seul contre-exemple précis suffit ; pour la prouver, en revanche, aucun nombre d'exemples ne suffit : il faut une démonstration.

Exercice 2 – Recherche — Tous les triangles isocèles

(5 pts)

- Le périmètre vaut $a + a + b$, donc $2a + b = 20$ (1 pt). (1,25)
- $b = 20 - 2a = 2 \times (10 - a)$ est un multiple de 2, donc pair (0,5 pt). Le triangle n'est pas aplati, donc $b < a + a = 2a$, c'est-à-dire $b < 20 - b$; ainsi $2b < 20$ et $b < 10$ (0,5 pt). L'autre inégalité $a < a + b$ est toujours vraie car $b > 0$ (0,5 pt). (1,25)
- b est pair, strictement positif et inférieur à 10 : $b \in \{2; 4; 6; 8\}$, ce qui donne $a = 9, 8, 7, 6$ (0,5 pt). Les quatre triangles sont : 9-9-2, 8-8-4, 7-7-6 et 6-6-8 ; on a examiné toutes les valeurs permises de b , aucun n'est oublié (0,5 pt). Aucun n'est équilatéral : il faudrait $3a = 20$, or 20 n'est pas un multiple de 3 (0,5 pt). (1,25)
- Le symétrique de A est un point A' , ceux de B et C sont C et B . Les diagonales $[AA']$ et $[BC]$ de $ABA'C$ ont le même milieu I : c'est un parallélogramme, et comme $AB = AC$, c'est un losange (0,5 pt). Périmètre : $4 \times 7 = 28$ cm (0,5 pt). (1,25)

Méthode — dans une recherche de « toutes les solutions », on réduit d'abord les possibilités par des conditions nécessaires (parité, inégalité triangulaire), puis on teste chaque cas restant : c'est ce qui garantit qu'on n'en oublie aucune.

Exercice 3 – Le zigzag entre deux parallèles

(4 pts)

- Si deux droites sont parallèles à une même troisième, elles sont parallèles entre elles : (Δ) et (d_2) sont toutes deux parallèles à (d_1) , donc parallèles (1 pt). (1)
- Avec la sécante (AM) et les parallèles (d_1) et (Δ) , l'angle formé en M par $[MA]$ et (Δ) est alterne-interne avec $\widehat{xAM}$: il mesure 35° (0,5 pt). De même avec la sécante (BM) et les parallèles (d_2) et (Δ) : l'autre angle mesure 50° (0,5 pt). (1)
- Les deux angles sont adjacents : $\widehat{AMB} = 35^\circ + 50^\circ = 85^\circ$ (0,5 pt). (1)
- $\widehat{MBC} = \widehat{yBM} = 50^\circ$ car C est sur $[By]$; $\widehat{MCB} = 35^\circ$, alterne-interne de $\widehat{xAM}$ avec la sécante (AC) (0,5 pt). A, M, C alignés : $\widehat{BMC} = 180^\circ - 85^\circ = 95^\circ$, et $35^\circ + 50^\circ + 95^\circ = 180^\circ$ (0,5 pt). On a bien $50^\circ + 35^\circ = 85^\circ = \widehat{AMB}$ (0,5 pt). (1)

Astuce — quand un angle « en zigzag » sépare deux parallèles, on trace la parallèle passant par son sommet : l'angle se coupe en deux morceaux, chacun alterne-interne avec un angle connu.

Exercice 4 – Problème — Le logo

(4 pts)

- a) O est le milieu de $[BC]$, donc $B' = C$ et $C' = B$ (0,5 pt). Le contour du logo est le quadrilatère $ABA'C$ (0,5 pt). (1)
- b) Les diagonales $[AA']$ et $[BC]$ ont le même milieu O : $ABA'C$ est un parallélogramme (0,5 pt). Deux côtés consécutifs sont égaux ($AB = AC = 6$ cm) : c'est un losange, de périmètre $4 \times 6 = 24$ cm (0,5 pt). (1)
- c) $\widehat{BAC} = 60^\circ$ (triangle équilatéral) et l'angle opposé $\widehat{BA'C} = 60^\circ$ (0,5 pt). Les angles consécutifs sont supplémentaires : $\widehat{ABA'} = \widehat{ACA'} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ (0,5 pt). (1)
- d) Le triangle ABA' est isocèle en B ($BA' = CA = 6$ cm) avec $\widehat{ABA'} = 120^\circ$, donc $\widehat{BAA'} = (180^\circ - 120^\circ) \div 2 = 30^\circ$ (0,5 pt). Dans le triangle ABO : $\widehat{AOB} = 180^\circ - (60^\circ + 30^\circ) = 90^\circ$, donc $(AA') \perp (BC)$ (0,5 pt). (1)

Erreur fréquente — affirmer qu'un quadrilatère est un losange parce qu'il « en a l'air » : il faut d'abord prouver que c'est un parallélogramme, puis ajouter l'égalité de deux côtés consécutifs.

Exercice 5 – Défi — L'angle droit caché

(4 pts)

- a) $AM = AB \div 2 = AD$: le triangle ADM est isocèle en A , donc $\widehat{AMD} = (180^\circ - 70^\circ) \div 2 = 55^\circ$ (0,5 pt). $MB = AD = BC$ (côtés opposés) : MBC est isocèle en B , avec $\widehat{MBC} = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$, donc $\widehat{BMC} = (180^\circ - 110^\circ) \div 2 = 35^\circ$ (0,5 pt). A, M, B alignés : $\widehat{DMC} = 180^\circ - (55^\circ + 35^\circ) = 90^\circ$ (0,5 pt). (1,33333)
- b) $\widehat{AMD} = (180^\circ - a) \div 2 = 90^\circ - \frac{a}{2}$ (0,5 pt). $\widehat{MBC} = 180^\circ - a$, donc $\widehat{BMC} = (180^\circ - (180^\circ - a)) \div 2 = \frac{a}{2}$ (0,5 pt). $\widehat{DMC} = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{a}{2}\right) - \frac{a}{2} = 90^\circ$, quelle que soit la valeur de a (0,5 pt). (1,33333)
- c) Le triangle ADM est isocèle en A avec un angle principal de 60° ; ses angles à la base mesurent $(180^\circ - 60^\circ) \div 2 = 60^\circ$: il est équilatéral (0,5 pt), donc $DM = AD$ (0,5 pt). (1,33333)

Astuce — traiter d'abord un cas numérique permet de repérer le résultat et le chemin de calcul ; il suffit ensuite de refaire exactement les mêmes étapes avec la lettre a pour obtenir une preuve générale.