

Corrigé et barème – Angles, triangles et parallélogrammes

— niveau ★★

Durée : 55 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 5°

Exercice 1 – Vrai ou faux ?

(4 pts)

- a) Faux (0,5 pt). Deux angles obtus mesurent chacun plus de 90° , donc ensemble plus de 180° , alors que la somme des trois angles d'un triangle vaut exactement 180° (0,5 pt). (1)
- b) Vrai (0,5 pt). Deux angles consécutifs d'un parallélogramme sont supplémentaires, donc les voisins de l'angle droit mesurent $180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$, et l'angle opposé aussi : les quatre angles sont droits (0,5 pt). (1)
- c) Vrai (0,5 pt). Les deux angles à la base sont égaux et leur somme est inférieure à 180° (l'angle principal n'est pas nul) ; chacun mesure donc moins de $180^\circ \div 2 = 90^\circ$ (0,5 pt). (1)
- d) Faux (0,5 pt). Pour conclure au parallélisme, les angles alternes-internes doivent être égaux ; ici $35^\circ \neq 145^\circ$, donc les droites ne sont pas parallèles (0,5 pt). (1)

Piège — des angles alternes-internes supplémentaires ne suffisent pas : ce sont les angles alternes-internes égaux (ou les angles internes du même côté supplémentaires) qui prouvent le parallélisme.

Exercice 2 – Angles en chaîne

(5 pts)

- a) Les points D , A et E sont alignés, donc $\widehat{DAE} = 180^\circ$ (angle plat) (0,5 pt). $\widehat{BAC} = 180^\circ - (42^\circ + 73^\circ) = 180^\circ - 115^\circ = 65^\circ$ (0,5 pt). (1,25)
- b) Les droites (d) et (BC) sont parallèles et coupées par la sécante (AB) ; $\widehat{DAB}$ et $\widehat{ABC}$ sont alternes-internes (0,5 pt), donc égaux : $\widehat{ABC} = 42^\circ$ (0,5 pt). (1,25)
- c) Première façon : avec la sécante (AC) , les angles alternes-internes $\widehat{EAC}$ et $\widehat{ACB}$ sont égaux, donc $\widehat{ACB} = 73^\circ$ (0,5 pt + 0,5 pt pour la justification). Seconde façon : dans le triangle ABC , $\widehat{ACB} = 180^\circ - (65^\circ + 42^\circ) = 73^\circ$ (0,5 pt). (1,25)
- d) Pour tout triangle ABC , on peut tracer la parallèle à (BC) passant par A (0,5 pt). Les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ se retrouvent alors en A grâce aux angles alternes-internes (0,5 pt) ; avec $\widehat{BAC}$, ils forment l'angle plat $\widehat{DAE}$, donc leur somme vaut 180° (0,5 pt). (1,25)

Astuce — tracer une parallèle bien choisie est le geste clé des démonstrations d'angles : elle « transporte » les angles d'un endroit à un autre de la figure.

Exercice 3 – Un parallélogramme particulier

(4 pts)

- a) $EFGH$ est un parallélogramme qui a deux côtés consécutifs de même longueur ($EF = FG$) (0,5 pt) : c'est un losange (0,5 pt). (1)
- b) Le triangle EFG est isocèle en F car $FE = FG$; ses angles à la base sont égaux (0,5 pt) : $\widehat{FEG} = (180^\circ - 120^\circ) \div 2 = 60^\circ \div 2 = 30^\circ$ (0,5 pt). (1)
- c) Deux angles consécutifs d'un parallélogramme sont supplémentaires (0,5 pt) : $\widehat{FEH} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ (0,5 pt). (1)
- d) $EH = FG = 5$ cm (côtés opposés), donc $EF = EH$: le triangle EFH est isocèle en E et ses angles à la base mesurent $(180^\circ - 60^\circ) \div 2 = 60^\circ$ (0,5 pt). Ses trois angles valent 60° : il est équilatéral, donc $FH = 5$ cm ; les diagonales se coupent en leur milieu, donc $OF = 5 \div 2 = 2,5$ cm (0,5 pt). (1)

Méthode — un triangle isocèle dont l'un des angles mesure 60° est forcément équilatéral : c'est souvent le chemin le plus court pour obtenir une longueur sans la mesurer.

Exercice 4 – Médiane et symétrie*(3 pts)*

- a) Elle passe par le sommet A et par le milieu du côté opposé : c'est la médiane issue de A (0,5 pt). (0,75)
- b) D est le symétrique de A par rapport à I , donc I est le milieu de $[AD]$; par hypothèse, I est aussi le milieu de $[BC]$ (0,5 pt). Les diagonales $[AD]$ et $[BC]$ de $ABDC$ ont le même milieu, donc $ABDC$ est un parallélogramme (0,5 pt). (0,75)
- c) Côtés opposés de même longueur : $CD = AB = 5$ cm et $BD = AC = 7$ cm (0,5 pt). Angles opposés égaux : $\widehat{BDC} = \widehat{BAC} = 80^\circ$ (0,5 pt). (0,75)
- d) $ABDC$ serait un parallélogramme ayant un angle droit en A : c'est un rectangle (0,5 pt). (0,75)

Erreur fréquente — écrire les sommets dans le désordre : le quadrilatère se nomme $ABDC$ (et non $ABCD$) car $[AD]$ et $[BC]$ sont ses diagonales, pas ses côtés.

Exercice 5 – Problème — L'échelle double*(4 pts)*

- a) $SA = SB$, donc SAB est isocèle en S et ses angles à la base sont égaux (0,5 pt). $\widehat{SAB} = (180^\circ - 38^\circ) \div 2 = 142^\circ \div 2 = 71^\circ$ (0,5 pt). (1)
- b) Les droites (MN) et (AB) sont parallèles et coupées par la sécante (SA) ; $\widehat{SMN}$ et $\widehat{SAB}$ sont correspondants (0,5 pt), donc égaux : $\widehat{SMN} = 71^\circ$ (0,5 pt). (1)
- c) De même avec la sécante (SB) : $\widehat{SNM} = \widehat{SBA} = 71^\circ$ (0,5 pt). Le triangle SMN a deux angles égaux, il est donc isocèle en S (0,5 pt). (1)
- d) Les deux angles à la base doivent mesurer au moins 65° , donc ensemble au moins $2 \times 65^\circ = 130^\circ$ (0,5 pt). L'ouverture vaut au plus $180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$ (0,5 pt). (1)

Piège — plus on ouvre l'échelle, plus les angles au sol diminuent : une contrainte « au moins » sur les angles à la base devient une contrainte « au plus » sur l'angle principal.