

Corrigé et barème – Angles, triangles et parallélogrammes

— niveau ★

Durée : 55 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 5°

Exercice 1 – Automatismes

(4 pts)

- Deux angles complémentaires ont pour somme 90° : $\widehat{yOz} = 90^\circ - 58^\circ = 32^\circ$ (0,5 pt). Comme les angles sont adjacents, $\widehat{xOz} = 58^\circ + 32^\circ = 90^\circ$: c'est un angle droit (0,5 pt). (1)
- La somme des angles d'un triangle vaut 180° : $\widehat{T} = 180^\circ - (64^\circ + 71^\circ) = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$ (0,5 pt pour la propriété, 0,5 pt pour le calcul). (1)
- O est le milieu de $[EF]$, donc le symétrique de E par rapport à O est F (0,5 pt). $OE = 7,2 \div 2 = 3,6$ cm (0,5 pt). (1)
- Le plus grand côté mesure 12 cm et $5 + 8 = 13$ cm. Comme $12 < 13$, l'inégalité triangulaire est respectée : le triangle est constructible (0,5 pt pour la comparaison, 0,5 pt pour la conclusion). (1)

Méthode — pour l'inégalité triangulaire, il suffit de comparer le plus grand côté à la somme des deux autres : les deux autres comparaisons sont alors automatiquement vraies.

Exercice 2 – Parallèles ou pas ?

(4 pts)

- Dans le triangle ABC , la somme des angles vaut 180° : $\widehat{ACB} = 180^\circ - (48^\circ + 65^\circ) = 180^\circ - 113^\circ = 67^\circ$ (1 pt). (1)
- Ils sont du même côté de la sécante (AB) et chacun du même côté de sa droite (du côté de A) : ce sont des angles correspondants (1 pt). (1)
- Les droites (MN) et (BC) sont coupées par la sécante (AB) et forment deux angles correspondants de même mesure, 65° (0,5 pt). Or, si deux droites forment avec une sécante deux angles correspondants égaux, alors elles sont parallèles : (MN) et (BC) sont parallèles (0,5 pt). (1)
- Les droites (MN) et (BC) sont parallèles et coupées par la sécante (AC) : les angles correspondants $\widehat{ANM}$ et $\widehat{ACB}$ sont égaux, donc $\widehat{ANM} = 67^\circ$ (0,5 pt). Vérification dans le triangle AMN : $180^\circ - 48^\circ - 65^\circ = 67^\circ$ (0,5 pt). (1)

Piège — la propriété (« si parallèles, alors angles égaux ») et sa réciproque (« si angles égaux, alors parallèles ») ne s'utilisent pas dans le même sens : ici, on démontre d'abord le parallélisme avec la réciproque, puis on s'en sert avec la propriété.

Exercice 3 – Le triangle isocèle

(4 pts)

- Dans un triangle isocèle, les angles à la base sont égaux ; ici la base est $[EF]$, donc $\widehat{DFE} = \widehat{DEF} = 52^\circ$ (1 pt). (1)
- $\widehat{EDF} = 180^\circ - (52^\circ + 52^\circ) = 180^\circ - 104^\circ = 76^\circ$ (0,5 pt pour la somme des angles, 0,5 pt pour le résultat). (1)
- Les points E , F et G sont alignés, donc $\widehat{DFE}$ et $\widehat{DFG}$ sont adjacents et supplémentaires (0,5 pt) : $\widehat{DFG} = 180^\circ - 52^\circ = 128^\circ$ (0,5 pt). (1)
- Le triangle est isocèle en D , donc $DF = DE = 6,5$ cm (0,5 pt). $EF = 17 - (6,5 + 6,5) = 17 - 13 = 4$ cm (0,5 pt). (1)

Erreur fréquente — confondre le sommet principal et la base : « isocèle en D » signifie que les deux côtés égaux partent de D ; les angles égaux sont donc ceux des deux autres sommets.

Exercice 4 – Symétrie centrale d'un triangle*(4 pts)*

- a) On trace la demi-droite $[KO]$ (0,5 pt), puis on reporte au compas la longueur OK de l'autre côté de O : K' est le point de $[KO]$ tel que $OK' = OK$, et O est le milieu de $[KK']$ (0,5 pt). (1)
- b) La symétrie centrale conserve les longueurs (0,5 pt) : $K'L' = KL = 4$ cm et $L'M' = LM = 5,5$ cm (0,5 pt). (1)
- c) La symétrie centrale conserve les mesures d'angles (0,5 pt) : $\widehat{K'L'M'} = \widehat{KLM} = 70^\circ$ (0,5 pt). (1)
- d) O est le milieu de $[KK']$ et le milieu de $[LL']$: les diagonales du quadrilatère $KLK'L'$ ont le même milieu (0,5 pt). Or un quadrilatère dont les diagonales ont le même milieu est un parallélogramme : $KLK'L'$ est un parallélogramme de centre O (0,5 pt). (1)

Astuce — un point et son symétrique par rapport à O forment toujours un segment de milieu O : dès que deux sommets et leurs images apparaissent, on tient un parallélogramme.

Exercice 5 – Problème — Le parallélogramme*(4 pts)*

- a) Les côtés opposés d'un parallélogramme ont la même longueur, donc le périmètre vaut $2 \times (AB + BC)$ (0,5 pt). $AB + BC = 26 \div 2 = 13$ cm, donc $BC = 13 - 8 = 5$ cm (0,5 pt). (1)
- b) Deux angles consécutifs d'un parallélogramme sont supplémentaires : $\widehat{BAD} = 180^\circ - 115^\circ = 65^\circ$ (0,5 pt). Deux angles opposés sont égaux : $\widehat{ADC} = \widehat{ABC} = 115^\circ$ (0,5 pt). (1)
- c) Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu, donc O est le milieu de $[BD]$ (0,5 pt) : $BD = 2 \times 3,8 = 7,6$ cm (0,5 pt). (1)
- d) Dans le triangle ABD : $\widehat{ADB} = 180^\circ - (65^\circ + 40^\circ) = 75^\circ$ (0,5 pt). Les droites (AB) et (DC) sont parallèles et coupées par la sécante (BD) : les angles alternes-internes $\widehat{ABD}$ et $\widehat{BDC}$ sont égaux, donc $\widehat{BDC} = 40^\circ$. Vérification : $75^\circ + 40^\circ = 115^\circ = \widehat{ADC}$ (0,5 pt). (1)

Méthode — dans un parallélogramme, chaque diagonale est une sécante de deux côtés parallèles : elle fait apparaître des angles alternes-internes égaux, qu'on peut toujours vérifier avec la somme des angles d'un triangle.