Corrigé et barème – angles, parallélisme et triangles — niveau ★★★

Durée : 55 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 5e

Exercice 1 – Corriger une copie *(4 pts)*

a) L'élève a retiré 64 puis ajouté 58 : il faut retirer la somme des deux angles. $\widehat{RTS} = 180° - (64° + 58°) = 180° - 122° = 58°$. Contrôle : avec $174°$, la somme des trois angles vaudrait $64 + 58 + 174 = 296$, et non 180. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

b) Deux angles opposés par le sommet ont toujours la même mesure : leur égalité ne prouve rien. De plus, ces deux angles ont leur sommet en M et ne font pas intervenir la droite (CD). Il faut comparer un angle de sommet M et un angle de sommet N : par exemple, avec E, M, N et F dans cet ordre sur la sécante et A, C du même côté de celle-ci, si l'angle correspondant $\widehat{CNE}$ mesurait aussi $75°$, alors $(AB)//(CD)$. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

c) $180° - 40° = 140°$ est la somme des deux angles à la base : il faut encore la partager en deux. $\widehat{DEF} = \widehat{DFE} = 140° \div 2 = 70°$. Contrôle : $40 + 70 + 70 = 180$. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

d) $MA = MB$ montre seulement que M est sur la médiatrice de $[AB]$. Si M était sur le segment $[AB]$, on aurait $MA + MB = AB$; or $5 + 5 = 10 \neq 6$. Le milieu de $[AB]$ est à $6 \div 2 = 3$ cm de A et de B. M est un point de la médiatrice, hors du segment, et le triangle MAB est isocèle en M. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

Astuce — un contrôle rapide démasque beaucoup d'erreurs : les trois angles d'un triangle doivent redonner $180°$, et un point M du segment $[AB]$ vérifie toujours $MA + MB = AB$.

Exercice 2 – Enquête — L'angle en zigzag *(5 pts)*

a) On sait que $(d_3)//(d_1)$ et $(d_2)//(d_1)$. Or si deux droites sont parallèles à une même droite, alors elles sont parallèles entre elles. Donc $(d_3)//(d_2)$. (1 pt) (1)

b) Avec la sécante (AP) et $(d_1)//(d_3)$, les angles $\widehat{xAP}$ et $\widehat{APz}$ sont alternes-internes, donc égaux : $\widehat{APz} = 38°$. Avec la sécante (PB) et $(d_3)//(d_2)$, les angles $\widehat{zPB}$ et $\widehat{PBy}$ sont alternes-internes, donc égaux : $\widehat{zPB} = 47°$. (0,5 pt par angle justifié) (1)

c) La demi-droite $[Pz)$ est entre $[PA)$ et $[PB)$: $\widehat{APz}$ et $\widehat{zPB}$ sont adjacents et $\widehat{APB} = 38° + 47° = 85°$. Règle : quand $(d_1)//(d_2)$, $\widehat{APB} = \widehat{xAP} + \widehat{PBy}$. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

d) Avec la sécante (AQ) et $(d_1)//(d_2)$, les angles alternes-internes $\widehat{xAQ}$ et $\widehat{AQB}$ sont égaux : $\widehat{PQB} = 38°$. Comme Q est sur $[By)$, $\widehat{PBQ} = \widehat{PBy} = 47°$. Dans le triangle PBQ : $\widehat{BPQ} = 180° - (38° + 47°) = 95°$. Enfin A, P et Q sont alignés : $\widehat{APB} = 180° - 95° = 85°$, le même résultat. (0,5 pt pour les deux angles en Q et en B + 0,5 pt pour $\widehat{BPQ}$ et $\widehat{APB}$) (1)

e) Non. Si (d_1) et (d_2) étaient parallèles, le raisonnement précédent donnerait $\widehat{APB} = 38° + 50° = 88°$. Or on mesure $85°$, et $85 \neq 88$: les droites (d_1) et (d_2) ne sont pas parallèles. (0,5 pt pour le calcul de $88°$ + 0,5 pt pour la conclusion) (1)

Méthode — quand un angle « en zigzag » est coincé entre deux parallèles, on trace une troisième parallèle par son sommet : elle le coupe en deux angles alternes-internes que l'on sait calculer.

Exercice 3 – Problème — Le puits des trois fermes *(4 pts)*

a) $OA = OB$, donc O est sur la médiatrice de $[AB]$; $OA = OC$, donc O est sur la médiatrice de $[AC]$. O est le point de concours des médiatrices : c'est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. On le construit en traçant au compas deux médiatrices, par exemple celles de $[AB]$ et de $[AC]$: O est leur point d'intersection. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

b) $OA = OB$: le triangle OAB est isocèle en O, donc $\widehat{OBA} = \widehat{OAB} = 25°$ et $\widehat{AOB} = 180° - 2 \times 25° = 130°$. De même, $OA = OC$: $\widehat{OCA} = 35°$ et $\widehat{AOC} = 180° - 2 \times 35° = 110°$. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

c) O est à l'intérieur du triangle : les angles $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$ et $\widehat{COA}$ font le tour complet du point O. $\widehat{BOC} = 360° - (130° + 110°) = 120°$. $OB = OC$: le triangle OBC est isocèle en O, donc $\widehat{OBC} = (180° - 120°) \div 2 = 30°$. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

d) $\widehat{BAC} = 25° + 35° = 60°$; $\widehat{ABC} = \widehat{OBA} + \widehat{OBC} = 25° + 30° = 55°$; $\widehat{ACB} = \widehat{OCA} + \widehat{OCB} = 35° + 30° = 65°$. Somme : $60 + 55 + 65 = 180$. (0,5 pt pour les trois angles + 0,5 pt pour la vérification) (1)

Piège — « à la même distance de A et de B » ne veut pas dire « au milieu de $[AB]$ » : le point est sur la médiatrice, et ici les triangles OAB, OBC et OCA sont tous isocèles en O.

Exercice 4 – Défi — Toutes les possibilités *(4 pts)*

a) Cas 1 : la base mesure 5 cm ; les deux côtés égaux mesurent $(25 - 5) \div 2 = 10$ cm ; plus grand côté $10 < 10 + 5 = 15$: le triangle existe. Cas 2 : les côtés égaux mesurent 5 cm ; la base mesure $25 - 2 \times 5 = 15$ cm ; or $15 > 5 + 5 = 10$: impossible. Une seule solution : 10 cm, 10 cm et 5 cm. (0,5 pt par cas) (1)

b) Cas 1 : base de 8 cm, côtés égaux de $(25 - 8) \div 2 = 8{,}5$ cm ; $8{,}5 < 8{,}5 + 8$: le triangle existe. Cas 2 : côtés égaux de 8 cm, base de $25 - 16 = 9$ cm ; $9 < 8 + 8 = 16$: le triangle existe. Deux solutions : 8,5 cm, 8,5 cm et 8 cm, ou 8 cm, 8 cm et 9 cm. (0,5 pt par cas) (1)

c) Angle de $40°$: s'il est l'angle principal, les angles à la base mesurent $(180° - 40°) \div 2 = 70°$ chacun ; s'il est un angle à la base, l'autre angle à la base mesure aussi $40°$ et l'angle principal $180° - 80° = 100°$. Deux solutions : $70°$ et $70°$, ou $40°$ et $100°$. (0,5 pt par cas) (1)

d) L'angle de $100°$ ne peut pas être un angle à la base : l'autre angle à la base mesurerait aussi $100°$, et $100° + 100° = 200°$ dépasse déjà $180°$. C'est donc l'angle principal : les deux autres mesurent $(180° - 100°) \div 2 = 40°$ chacun. Une seule solution. (0,5 pt pour le cas éliminé + 0,5 pt pour la solution) (1)

Piège — dans un triangle isocèle, une donnée peut concerner la base ou un des côtés égaux, l'angle principal ou un angle à la base : on étudie les deux cas, puis on élimine ceux qui sont impossibles (inégalité triangulaire, somme de $180°$).

Exercice 5 – Problème — Le champ partagé *(3 pts)*

a) $AB = AC$, donc A est sur la médiatrice de $[BC]$; cette médiatrice passe aussi par le milieu I de $[BC]$. Elle passe par les deux points A et I : c'est la droite (AI), donc $(AI) \perp (BC)$. $[AI]$ est la hauteur relative à $[BC]$: aire $= 120 \times 80 \div 2 = 4\,800$ m². (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

b) (AI) est la médiane issue de A dans ABC : aire de $ABI = 4\,800 \div 2 = 2\,400$ m². Dans le triangle ABI, J est le milieu de $[AI]$: (BJ) est la médiane issue de B, elle partage ABI en deux triangles de même aire : aire de ABJ = aire de $BJI = 2\,400 \div 2 = 1\,200$ m². (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

c) De même, aire de $AIC = 2\,400$ m² et, dans ce triangle, (CJ) est la médiane issue de C : aire de CJI = aire de $ACJ = 1\,200$ m². Les quatre parts mesurent 1 200 m², et $\dfrac{1\,200}{4\,800} = \dfrac{1}{4}$: chaque enfant reçoit un quart du champ. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

Astuce — une médiane partage un triangle en deux triangles de même aire : en traçant ensuite une médiane dans chacune des deux moitiés, on obtient quatre parts de même aire, sans aucune mesure supplémentaire.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).