Corrigé et barème – angles, parallélisme et triangles — niveau ★★

Durée : 55 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 5e

Exercice 1 – Démontrer avec les angles *(4 pts)*

a) Dans le triangle ABC : $\widehat{ACB} = 180° - (47° + 71°) = 180° - 118° = 62°$. (0,5 pt pour la méthode + 0,5 pt pour le résultat) (1)

b) On sait que, pour les droites (AB) et (CE) coupées par la sécante (AC), les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ACE}$ sont alternes-internes (entre les deux droites, de part et d'autre de la sécante) et mesurent tous les deux $47°$. Or si deux droites coupées par une sécante forment des angles alternes-internes de même mesure, alors elles sont parallèles. Donc $(CE)//(AB)$. (0,5 pt pour la paire d'angles alternes-internes + 0,5 pt pour la rédaction avec la réciproque) (1)

c) C'est $\widehat{ECD}$ (au-dessus de (BD), à droite de chaque droite). On sait que $(CE)//(AB)$ (question précédente). Or si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, les angles correspondants ont la même mesure. Donc $\widehat{ECD} = \widehat{ABC} = 71°$. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

d) $62° + 47° + 71° = 180°$. C'était prévisible : les trois angles sont adjacents deux à deux et forment l'angle plat $\widehat{BCD}$, car B, C et D sont alignés. Comme $\widehat{ACE} = \widehat{BAC}$ et $\widehat{ECD} = \widehat{ABC}$, on retrouve que la somme des angles du triangle ABC vaut $180°$. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

Méthode — pour démontrer un parallélisme, on cherche deux angles alternes-internes ou correspondants de même mesure (réciproque) ; une fois le parallélisme établi, il sert à calculer d'autres angles (propriété).

Exercice 2 – Qui a raison ? *(4 pts)*

a) Hugo a tort. Le plus grand côté mesure 10,5 cm et $4{,}5 + 6 = 10{,}5$: il y a égalité, donc les trois points sont alignés. On obtient un « triangle » aplati, pas un vrai triangle. (1 pt) (1)

b) Sarah a raison. Un triangle rectangle a un angle de $90°$; l'angle de $48°$ est un de ses angles aigus, et les deux angles aigus sont complémentaires : $90° - 48° = 42°$. Contrôle : $90 + 48 + 42 = 180$. (1 pt) (1)

c) Malik a tort. Si le pied H était sur $[BC]$, le triangle ABH aurait un angle droit en H et l'angle obtus $\widehat{ABH} = \widehat{ABC}$ en B : leur somme dépasserait déjà $180°$, c'est impossible. Le pied H est sur la droite (BC), à l'extérieur du segment, du côté de B : il faut prolonger $[CB]$ pour tracer cette hauteur. (1 pt) (1)

d) Zoé a tort. Deux angles sont complémentaires quand la somme de leurs mesures vaut $90°$, quelle que soit leur position : $37° + 53° = 90°$, ils sont complémentaires. (1 pt) (1)

Piège — « complémentaires » et « supplémentaires » ne parlent que de la somme des mesures, pas de la position : deux angles éloignés l'un de l'autre peuvent l'être, alors que des angles adjacents doivent avoir le même sommet.

Exercice 3 – Construire avec un angle à calculer *(4 pts)*

a) $\widehat{PQR} = 180° - (38° + 80°) = 180° - 118° = 62°$. Le côté connu est $[PQ]$: pour construire, il faut les angles à ses deux extrémités, P et Q. L'angle en R n'est pas adjacent à $[PQ]$, d'où le calcul de l'angle en Q. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

b) Je trace $[PQ]$ de 7 cm ; au rapporteur, l'angle de $38°$ en P et l'angle de $62°$ en Q, du même côté de (PQ) ; les deux demi-droites se coupent en R. Contrôle : on mesure $\widehat{PRQ} \approx 80°$. (0,5 pt pour la figure à main levée + 0,5 pt pour la construction) (1)

c) O est sur la médiatrice de $[PQ]$, donc $OP = OQ$; il est sur celle de $[QR]$, donc $OQ = OR$. Ainsi $OP = OQ = OR$: le cercle de centre O passant par P passe par Q et R, c'est le cercle circonscrit. Les trois angles ($38°$, $62°$ et $80°$) sont aigus, donc O est à l'intérieur du triangle. (0,5 pt pour les tracés et l'explication + 0,5 pt pour la position de O) (1)

d) Le triangle PRH est rectangle en H : $\widehat{PRH} = 90° - 38° = 52°$. Le triangle QRH est rectangle en H : $\widehat{HRQ} = 90° - 62° = 28°$. Les angles en P et en Q étant aigus, H est entre P et Q : $\widehat{PRH}$ et $\widehat{HRQ}$ sont adjacents et $52° + 28° = 80° = \widehat{PRQ}$. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

Erreur fréquente — avec une longueur et deux angles, les angles tracés au rapporteur doivent être aux extrémités du côté connu : un angle « mal placé » se remplace d'abord par celui que l'on calcule avec la somme 180°.

Exercice 4 – Triangle rectangle, médiane et cercle *(4 pts)*

a) $(AB) \perp (AC)$: avec la base $[AC]$, la hauteur relative est $[AB]$. Aire $= 8 \times 6 \div 2 = 24$ cm². (1 pt) (1)

b) I est le milieu de $[BC]$: (AI) est la médiane issue de A. Or une médiane partage un triangle en deux triangles de même aire. Donc aire de ABI = aire de $AIC = 24 \div 2 = 12$ cm². (1 pt) (1)

c) Le triangle est rectangle en A : le centre de son cercle circonscrit est le milieu du plus grand côté, l'hypoténuse $[BC]$, c'est-à-dire I. Donc $IA = IB = IC = 10 \div 2 = 5$ cm (ce sont des rayons). (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

d) Périmètre de ABI : $6 + 5 + 5 = 16$ cm ; périmètre de AIC : $8 + 5 + 5 = 18$ cm. Les deux triangles ont la même aire mais pas le même périmètre : deux triangles de même aire ne sont pas forcément superposables. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

Astuce — dans un triangle rectangle, les deux côtés de l'angle droit sont l'un une base, l'autre la hauteur relative à cette base : l'aire se calcule sans rien tracer.

Exercice 5 – Problème — La passerelle *(4 pts)*

a) Les droites (d_1) et (d_2) sont coupées par la sécante (AB) ; $\widehat{xAB}$ et $\widehat{ABC}$ sont alternes-internes. Or si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, les angles alternes-internes ont la même mesure. Donc $\widehat{ABC} = 65°$. (1 pt) (1)

b) $AB = AC$: le triangle ABC est isocèle en A, ses angles à la base sont égaux : $\widehat{ACB} = 65°$. Puis $\widehat{BAC} = 180° - 2 \times 65° = 180° - 130° = 50°$. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

c) 1re façon : x, A et y sont alignés, donc $\widehat{xAB} + \widehat{BAC} + \widehat{CAy} = 180°$ et $\widehat{CAy} = 180° - (65° + 50°) = 65°$. 2e façon : avec la sécante (AC), $\widehat{CAy}$ et $\widehat{ACB}$ sont alternes-internes et $(d_1)//(d_2)$, donc $\widehat{CAy} = \widehat{ACB} = 65°$. (0,5 pt par façon) (1)

d) On sait que $(d_1)//(d_2)$ et $(AH) \perp (d_2)$. Or si deux droites sont parallèles et qu'une troisième est perpendiculaire à l'une, alors elle est perpendiculaire à l'autre. Donc $(AH) \perp (d_1)$. Le triangle ABC est isocèle en A : la hauteur issue de A est aussi la médiane issue de A et la médiatrice de $[BC]$. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

Piège — des angles alternes-internes n'ont la même mesure que si les droites sont parallèles : ici, c'est l'énoncé (berges parallèles) qui l'autorise, pas l'allure de la figure.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).