

Corrigé et barème – Aires, volumes et représentation des solides — niveau ★★★

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 5^e

Exercice 1 – Automatismes justifiés

(4 pts)

- Une face : $150 \div 6 = 25 \text{ cm}^2$, donc l'arête vaut 5 cm car $5 \times 5 = 25$ (0,5 pt). $V = 5 \times 5 \times 5 = 125 \text{ cm}^3$ (0,5 pt). (1)
- $V \approx 3,14 \times 5 \times 5 \times 4$; on regroupe $25 \times 4 = 100$ (0,5 pt), donc $V \approx 3,14 \times 100 = 314 \text{ cm}^3$ (0,5 pt). (1)
- Longueur + largeur = $26 \div 2 = 13$ cm. Couples possibles : 1 et 12 (aire 12), 2 et 11 (22), 3 et 10 (30), 4 et 9 (36), 5 et 8 (40), 6 et 7 (42) (0,5 pt). Seul 8 cm sur 5 cm convient (0,5 pt). (1)
- Non. Si la base a n côtés, il y a n arêtes en bas, n en haut et n latérales, soit $3 \times n$ arêtes (0,5 pt). Or 25 n'est pas un multiple de 3 ($3 \times 8 = 24$, $3 \times 9 = 27$) (0,5 pt). (1)

Astuce — sans calculatrice, on regroupe les facteurs qui donnent 10, 100 ou 1 000 avant de multiplier par 3,14 : l'ordre des facteurs ne change pas un produit.

Exercice 2 – Quarts de disque et cube percé

(4 pts)

- Les quatre quarts ont le même rayon 4 cm et ne se chevauchent pas ($4 + 4 = 8$) : réunis, ils forment un disque entier (0,5 pt). Aire : $3,14 \times 4 \times 4 = 3,14 \times 16 = 50,24 \text{ cm}^2$ (0,5 pt). (1)
- Carré : $8 \times 8 = 64 \text{ cm}^2$ (0,5 pt) ; reste $64 - 50,24 = 13,76 \text{ cm}^2$ (0,5 pt). (1)
- Chaque côté du carré, $8 = 4 + 4$, est entièrement mangé par deux quarts de disque : il ne reste que les 4 arcs (0,5 pt). Ils forment un cercle de rayon 4 cm : $3,14 \times 8 = 25,12 \text{ cm}$ (0,5 pt). (1)
- Cube : $8 \times 8 \times 8 = 512 \text{ cm}^3$; trou : $3,14 \times 2 \times 2 \times 8 = 3,14 \times 32 = 100,48 \text{ cm}^3$ (0,5 pt). Reste : $512 - 100,48 = 411,52 \text{ cm}^3$ (0,5 pt). (1)

Méthode — des morceaux de disque de même rayon se recollent en disque entier : on calcule une seule aire au lieu de quatre, et de même une seule longueur de cercle.

Exercice 3 – Recherche — les boîtes de 24 cm^3

(5 pts)

- Comme a est la plus petite dimension, $a \times a \times a \leq 24$; or $3^3 = 27$, donc $a = 1$ ou $a = 2$ (0,5 pt). Si $a = 1 : b \times c = 24$ avec $b \times b \leq 24$, donc $b \leq 4 : 1 \times 1 \times 24, 1 \times 2 \times 12, 1 \times 3 \times 8, 1 \times 4 \times 6$ (0,5 pt). Si $a = 2 : b \times c = 12$ avec $2 \leq b$ et $b \times b \leq 12$, donc $b = 2$ ou $3 : 2 \times 2 \times 6, 2 \times 3 \times 4$ (0,5 pt). Il y a donc 6 pavés (0,5 pt). (1,66667)
- Un cube aurait une arête a avec $a \times a \times a = 24$; or $2^3 = 8$ et $3^3 = 27$: impossible (0,5 pt). Les pavés $1 \times 1 \times 24$ et $2 \times 2 \times 6$ ont deux faces carrées (1×1 et 2×2) (0,5 pt). (1,66667)
- Aire = $2 \times (a \times b + b \times c + a \times c) : 98 ; 76 ; 70 ; 68 ; 56 ; 52 \text{ cm}^2$ dans l'ordre de la liste (1 pt, 0,5 pt si une erreur). Le moins de carton : $2 \times 3 \times 4$, avec 52 cm^2 (0,5 pt) ; son patron a deux faces de 2×3 , deux de 3×4 et deux de $2 \times 4 \text{ cm}$ (0,5 pt). (1,66667)

Méthode — pour être sûr de n'oublier aucune solution, on impose un ordre ($a \leq b \leq c$) puis on fait varier la plus petite dimension de 1 jusqu'à sa valeur maximale.

Exercice 4 – Problème — vider la cuve*(4 pts)*

- a) $1,2 \text{ m} = 120 \text{ cm}$ (0,5 pt). $V \approx 3,14 \times 50 \times 50 \times 120 = 3,14 \times 300\,000 = 942\,000 \text{ cm}^3 = 942 \text{ dm}^3 = 942 \text{ L}$ (0,5 pt). (1,33333)
- b) Un bidon : $30 \times 20 \times 25 = 15\,000 \text{ cm}^3 = 15 \text{ L}$ (0,5 pt). $942 = 15 \times 62 + 12$: 62 bidons pleins ne suffisent pas (0,5 pt), il en faut 63 et le dernier contient 12 L (0,5 pt). (1,33333)
- c) Le patron de la paroi est un rectangle : longueur = $3,14 \times 100 = 314 \text{ cm} = 3,14 \text{ m}$, largeur 1,2 m (0,5 pt). Aire : $3,14 \times 1,2 = 3,768 \text{ m}^2$ (1 pt). (1,33333)

Erreur fréquente — quand un partage ne tombe pas juste, arrondir au plus proche est une faute : s'il reste de l'eau, il faut un contenant de plus, même presque vide.

Exercice 5 – Pour aller plus loin*(3 pts)*

- a) Le volume est longueur $\times$ largeur $\times$ hauteur ; chacun des trois facteurs est multiplié par 2, donc le produit est multiplié par $2 \times 2 \times 2 = 8$ (1 pt). (1)
- b) Chaque face est un rectangle dont les deux dimensions sont doublées : son aire est multipliée par $2 \times 2 = 4$ (0,5 pt). Toutes les faces étant multipliées par 4, leur somme aussi : l'aire totale est multipliée par 4 (0,5 pt). (1)
- c) Non. L'aire de la base $\pi \times r \times r$ devient $\pi \times (2r) \times (2r)$: elle est multipliée par 4, car le rayon apparaît deux fois (0,5 pt). La hauteur divisée par 2 donne un volume multiplié par $4 \div 2 = 2$: il double (0,5 pt). (1)

Piège — quand les longueurs sont multipliées par 2, les aires le sont par 4 et les volumes par 8 : une dimension qui figure deux fois dans une formule compte deux fois.