Angles & parallélisme

Fiche méthode

(Mathématiques 5e · Espace et géométrie · Angles et parallélisme)

La démarche pour un exercice d'angles

1. Je repère la configuration : deux droites qui se coupent (angles opposés par le sommet, adjacents) ou deux droites coupées par une sécante (alternes-internes, correspondants) ; pour une mesure au rapporteur, la nature de l'angle (aigu ou obtus) ; pour deux droites, les angles droits codés.

2. Je regarde la question. Les droites sont parallèles : j'utilise la **propriété** pour calculer un angle. On me demande si elles sont parallèles : j'utilise la **réciproque**.

3. Je rédige en trois temps : on sait que… ; or (la propriété) ; donc (la conclusion).

Le réflexe — des parallèles donnent des angles égaux (propriété) ; des angles égaux donnent des parallèles (réciproque).

Cas 1 · Rappels de 6e : mesurer un angle, perpendiculaires et parallèles

Réflexe — aigu ou obtus d'abord, puis la graduation qui part du 0 ; bissectrice : la moitié ; droites : on sait que, or (la propriété), donc.

Exemple 1. L'angle aigu $\widehat{RST}$ est mesuré au rapporteur : $[SR)$ est sur un 0 et $[ST)$ passe par 33 et 147. Donner sa mesure, puis celle des deux angles formés par sa bissectrice.

L'angle est aigu : sa mesure est inférieure à 90°, donc $\widehat{RST} = 33^\circ$ (147 se lit sur l'autre graduation).
Bissectrice : $33 \div 2 = 16{,}5$, deux angles de $16{,}5^\circ$.

Exemple 2. $(a) \perp (c)$, $(b) \perp (c)$ et $(e) \perp (a)$. Que dire de (a) et (b), puis de (e) et (b) ?

On sait que $(a) \perp (c)$ et $(b) \perp (c)$. Or deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles. Donc $(a)//(b)$.
On sait que $(a)//(b)$ et $(e) \perp (a)$. Or une perpendiculaire à l'une de deux parallèles est perpendiculaire à l'autre. Donc $(e) \perp (b)$.

Attention — la mauvaise graduation donne 180° moins la vraie mesure ; deux droites perpendiculaires ne sont jamais parallèles.

Cas 2 · Angles opposés, adjacents, complémentaires, supplémentaires

Réflexe — opposé par le sommet : même mesure ; adjacent sur une droite : 180° moins l'angle ; complémentaire : 90° moins l'angle.

Exemple. Les droites (RS) et (TU) se coupent en V et $\widehat{RVT} = 41^\circ$. Trouver $\widehat{SVU}$, $\widehat{TVS}$ et le complémentaire de 41°.

$\widehat{SVU}$ est opposé par le sommet à $\widehat{RVT}$: $\widehat{SVU} = 41^\circ$.
$\widehat{TVS}$ et $\widehat{RVT}$ forment l'angle plat $\widehat{RVS}$: $\widehat{TVS} = 180^\circ - 41^\circ = 139^\circ$.
Complémentaire : $90^\circ - 41^\circ = 49^\circ$.

Attention — deux angles opposés par le sommet sont égaux, pas supplémentaires.

Cas 3 · Reconnaître alternes-internes et correspondants

Réflexe — je repère les deux sommets ; un Z : alternes-internes ; un F : correspondants.

Exemple. La sécante (IJ) coupe (UV) en K et (WZ) en L (I du côté de K, U et W à gauche). Nommer l'alterne-interne et le correspondant de $\widehat{UKL}$.

$\widehat{UKL}$ est entre les deux droites, à gauche de la sécante.

Alterne-interne : entre les droites, à droite de la sécante, de sommet L : $\widehat{KLZ}$.

Correspondant : à la même place en L (sous (WZ), à gauche) : $\widehat{WLJ}$.

Attention — ces noms disent où sont les angles, pas qu'ils sont égaux.

Cas 4 · Calculer un angle avec des parallèles

Réflexe — droites parallèles : alternes-internes et correspondants de même mesure ; puis angles opposés et adjacents.

Exemple. Avec la figure du cas 3, $(UV)//(WZ)$ et $\widehat{UKL} = 69^\circ$. Trouver $\widehat{KLZ}$, $\widehat{WLJ}$ et $\widehat{LKV}$.

On sait que $(UV)//(WZ)$. Or si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, les angles alternes-internes ont la même mesure. Donc $\widehat{KLZ} = \widehat{UKL} = 69^\circ$.

De même, avec les angles correspondants : $\widehat{WLJ} = 69^\circ$.

$\widehat{LKV}$ forme avec $\widehat{UKL}$ l'angle plat $\widehat{UKV}$: $\widehat{LKV} = 180^\circ - 69^\circ = 111^\circ$.

Attention — sans la donnée « parallèles », on ne peut rien affirmer sur ces angles.

Cas 5 · Démontrer que deux droites sont parallèles

Réflexe — deux angles alternes-internes ou correspondants égaux : parallèles ; différents : pas parallèles.

Exemple. Une sécante coupe (GH) en M et (ST) en N ; les angles alternes-internes $\widehat{GMN}$ et $\widehat{MNT}$ mesurent 87°. Les droites sont-elles parallèles ?

On sait que les angles alternes-internes $\widehat{GMN}$ et $\widehat{MNT}$ ont la même mesure, 87°.

Or si deux droites coupées par une sécante forment des angles alternes-internes de même mesure, alors elles sont parallèles.

Donc $(GH)//(ST)$. Avec 87° et 89°, elles ne le seraient pas.

Attention — deux angles opposés par le sommet sont toujours égaux : ils ne prouvent rien.

Les pièges

- Lire un angle visiblement aigu sur la mauvaise graduation du rapporteur : on trouve 180° moins sa mesure, un angle obtus.
- Écrire qu'un angle opposé par le sommet est supplémentaire : il est égal.
- Chercher le complémentaire d'un angle obtus : il n'existe pas, et une mesure négative signale l'erreur.
- Affirmer que deux angles correspondants sont égaux sans savoir que les droites sont parallèles.
- Conclure au parallélisme parce que les droites « ont l'air » parallèles, ou parce que deux angles alternes-internes (ou correspondants) sont supplémentaires : il faut qu'ils soient égaux.
- Nommer un angle avec une seule lettre : avec une sécante, quatre angles ont le sommet E.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).