Théorème de Thalès : triangles emboîtés

Fiche méthode

(Mathématiques 4e · Espace et géométrie · Théorème de Thalès)

La démarche pour utiliser le théorème de Thalès

1. Je repère la configuration : le sommet commun, les deux points sur les côtés, les deux droites parallèles (énoncé, verticales).

2. Je cite le bon outil : le théorème de Thalès pour une longueur, sa réciproque ou sa contraposée pour savoir si deux droites sont parallèles.

3. J'écris les rapports avec les lettres, petit triangle en haut, grand en bas, puis je remplace par les valeurs, dans la même unité.

4. Je calcule et je conclus : produit en croix, contrôle (le petit est plus petit que le grand), unité.

Le réflexe — parallèles connues → théorème de Thalès et produit en croix ; parallélisme à prouver → je compare AM/AB et AN/AC ; MB donné → AB = AM + MB d'abord.

Cas 1 · Écrire l'égalité des rapports

Réflexe — je pars du sommet commun : côtés du petit triangle en haut, côtés correspondants du grand en bas ; le côté parallèle va avec le côté parallèle.

Exemple. Dans le triangle IJK, $E \in [IJ]$, $F \in [IK]$ et $(EF) \parallel (JK)$. Écrire l'égalité des rapports.

Le sommet commun est I ; le petit triangle est IEF, le grand est IJK.

$$\frac{IE}{IJ} = \frac{IF}{IK} = \frac{EF}{JK}.$$

Attention — EJ et FK ne sont des côtés d'aucun triangle : ils n'apparaissent jamais dans les rapports.

Cas 2 · Calculer une longueur

Réflexe — je garde les deux rapports qui contiennent la longueur cherchée et je fais un produit en croix.

Exemple. Même figure, $IE = 2$ cm, $IJ = 5$ cm, $IK = 6{,}5$ cm et $EF = 1{,}8$ cm. Calculer IF et JK.

$(EF) \parallel (JK)$, donc d'après le théorème de Thalès : $\frac{IE}{IJ} = \frac{IF}{IK} = \frac{EF}{JK}$, soit $\frac{2}{5} = \frac{IF}{6{,}5} = \frac{1{,}8}{JK}$.

$IF = \frac{2 \times 6{,}5}{5} = 2{,}6$ cm et $JK = \frac{5 \times 1{,}8}{2} = 4{,}5$ cm.

Attention — contrôle : un côté du petit triangle est plus court que le côté correspondant du grand ($2{,}6 < 6{,}5$ et $1{,}8 < 4{,}5$).

Cas 3 · Rapport de réduction et longueurs à déduire

Réflexe — k = petit ÷ grand ; petit = grand × k, grand = petit ÷ k ; si l'énoncé donne EJ, je calcule d'abord $IJ = IE + EJ$.

Exemple. $IE = 4{,}8$ cm, $EJ = 1{,}2$ cm, $JK = 5{,}5$ cm et $(EF) \parallel (JK)$. Calculer EF.

$IJ = 4{,}8 + 1{,}2 = 6$ cm, donc $k = 4{,}8 \div 6 = 0{,}8$.

$EF = 0{,}8 \times 5{,}5 = 4{,}4$ cm. Les angles sont conservés et le périmètre de IEF vaut 0,8 fois celui de IJK.

Attention — le rapport de Thalès est $\frac{IE}{IJ}$, pas $\frac{IE}{EJ}$.

Cas 4 · Les droites sont-elles parallèles ?

Réflexe — d'une part $\dfrac{IE}{IJ}$, d'autre part $\dfrac{IF}{IK}$; égaux $\to$ réciproque, parallèles ; différents $\to$ contraposée, pas parallèles.

Exemple. $IE = 2{,}8$ cm, $IJ = 4$ cm, $IF = 3{,}5$ cm, $IK = 5$ cm. (EF) et (JK) sont-elles parallèles ?

Produits en croix : $IE \times IK = 2{,}8 \times 5 = 14$ et $IJ \times IF = 4 \times 3{,}5 = 14$.
Ils sont égaux, donc $\dfrac{IE}{IJ} = \dfrac{IF}{IK}$: d'après la réciproque du théorème de Thalès, $(EF) \parallel (JK)$.

Attention — on ne se sert pas de $\dfrac{EF}{JK}$, et l'on n'arrondit pas avant de comparer.

Cas 5 · Thalès dans une situation

Réflexe — je fais un schéma ; je repère le sommet commun et les deux parallèles (souvent deux verticales).

Exemple. Un bâton vertical de 1,6 m a une ombre de 2 m dont le bout coïncide avec celui de l'ombre d'une tour ; l'ombre de la tour mesure 30 m. Hauteur de la tour ?

Le bâton et la tour sont verticaux, donc parallèles ; le sommet commun est le bout S des ombres.
$\dfrac{2}{30} = \dfrac{1{,}6}{h}$, donc $h = \dfrac{30 \times 1{,}6}{2} = 24$ m.

Attention — toutes les longueurs dans la même unité, et un résultat plausible.

Les pièges

- Écrire $\dfrac{AM}{MB}$: MB n'est un côté d'aucun des deux triangles ; le bon rapport est $\dfrac{AM}{AB}$.
- Associer MN à AC au lieu de BC : le côté parallèle va avec le côté parallèle.
- Oublier d'écrire que les droites sont parallèles : le théorème n'est pas justifié.
- Se tromper de sens dans le produit en croix : un côté du petit triangle plus long que celui du grand est forcément faux.
- Utiliser $\dfrac{MN}{BC}$ pour prouver un parallélisme : seule la comparaison de $\dfrac{AM}{AB}$ et $\dfrac{AN}{AC}$ compte.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).