Théorème de Pythagore : calculer, réciproque

Fiche méthode

(Mathématiques 4e · Espace et géométrie · Théorème de Pythagore)

La démarche pour utiliser le théorème de Pythagore

1. Je repère le triangle rectangle et son angle droit (codage, énoncé) ; l'hypoténuse est le côté d'en face.

2. Je cite le bon outil : le théorème de Pythagore pour une longueur, sa réciproque ou sa contraposée pour savoir si un triangle est rectangle.

3. J'écris l'égalité avec les lettres, l'hypoténuse seule à gauche, puis je remplace par les valeurs, dans la même unité.

4. Je conclus : racine carrée, arrondi seulement si on le demande, unité ; ou le sommet de l'angle droit.

Le réflexe — hypoténuse inconnue → on additionne les carrés ; côté de l'angle droit inconnu → on soustrait ; trois longueurs → on compare le carré du plus grand côté à la somme des deux autres carrés.

Cas 1 · Repérer l'hypoténuse et écrire l'égalité

Réflexe — l'hypoténuse est le côté opposé à l'angle droit, le seul dont le nom ne contient pas la lettre de l'angle droit.

Exemple 1. TUV est rectangle en U. Écrire l'égalité de Pythagore.

L'angle droit est en U : l'hypoténuse est $[TV]$.
$TV^2 = TU^2 + UV^2$.

Exemple 2. Calculer $0{,}9^2$ et $\sqrt{1{,}21}$.

$0{,}9^2 = 0{,}9 \times 0{,}9 = 0{,}81$.
$1{,}1^2 = 1{,}21$ et $1{,}1$ est positif, donc $\sqrt{1{,}21} = 1{,}1$.

Attention — TV^2 n'est pas $TV \times 2$, et $TU^2 + UV^2$ n'est pas $(TU + UV)^2$.

Cas 2 · Calculer l'hypoténuse

Réflexe — j'additionne les carrés des côtés de l'angle droit, puis je prends la racine carrée.

Exemple 1. XYZ est rectangle en Y, $XY = 2$ cm et $YZ = 2{,}1$ cm. Calculer XZ.

XYZ est rectangle en Y, donc d'après le théorème de Pythagore : $XZ^2 = XY^2 + YZ^2$.
$XZ^2 = 2^2 + 2{,}1^2 = 4 + 4{,}41 = 8{,}41$, donc $XZ = \sqrt{8{,}41} = 2{,}9$ cm.

Exemple 2. Les côtés de l'angle droit mesurent 2 cm et 3 cm. Hypoténuse au dixième ?

$2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$. Valeur exacte : $\sqrt{13}$ cm.
$\sqrt{13} \approx 3{,}606$, soit environ 3,6 cm au dixième.

Attention — on n'additionne pas les longueurs : $2 + 2{,}1 = 4{,}1$, alors que $XZ = 2{,}9$ cm.

Cas 3 · Calculer un côté de l'angle droit

Réflexe — je soustrais : carré de l'hypoténuse moins carré du côté connu, puis racine carrée.

Exemple. ABC est rectangle en C, $AB = 4{,}1$ cm et $AC = 0{,}9$ cm. Calculer BC.

L'hypoténuse est $[AB]$: $AB^2 = AC^2 + BC^2$, donc $BC^2 = AB^2 - AC^2$.
$BC^2 = 16{,}81 - 0{,}81 = 16$, donc $BC = \sqrt{16} = 4$ cm.

Attention — le résultat doit être plus court que l'hypoténuse ; sinon, on a additionné au lieu de soustraire.

Cas 4 · Le triangle est-il rectangle ?

Réflexe — d'une part le carré du plus grand côté, d'autre part la somme des deux autres carrés ; égalité → réciproque, sinon → contraposée.

Exemple 1. MNO : $MN = 1{,}6$ cm, $NO = 3$ cm, $MO = 3{,}4$ cm.

D'une part $MO^2 = 11{,}56$; d'autre part $MN^2 + NO^2 = 2{,}56 + 9 = 11{,}56$.
Égalité : d'après la réciproque du théorème de Pythagore, MNO est rectangle en N.

Exemple 2. RST : $RS = 4$ cm, $ST = 5$ cm, $RT = 6{,}5$ cm.

D'une part $RT^2 = 42{,}25$; d'autre part $RS^2 + ST^2 = 16 + 25 = 41$.
$42{,}25 \neq 41$: d'après la contraposée, RST n'est pas rectangle.

Attention — on calcule les deux membres séparément avant de conclure ; une égalité « presque vraie » ne suffit pas.

Cas 5 · Pythagore dans une figure

Réflexe — je cherche le triangle rectangle caché : diagonale d'un rectangle, demi-diagonales d'un losange, demi-base d'un triangle isocèle.

Exemple. Diagonale d'un rectangle de 2,4 cm sur 3,2 cm.

Deux côtés consécutifs et la diagonale forment un triangle rectangle.
$d^2 = 2{,}4^2 + 3{,}2^2 = 5{,}76 + 10{,}24 = 16$, donc $d = 4$ cm.

Attention — losange → demi-diagonales ; triangle isocèle → demi-base.

Les pièges

- Prendre le mauvais côté pour hypoténuse : si ABC est rectangle en B, l'hypoténuse est $[AC]$, pas $[BC]$.
- Additionner les longueurs au lieu des carrés : avec 5 cm et 7 cm, l'hypoténuse n'est pas 12 cm mais $\sqrt{74} \approx 8{,}6$ cm.
- Additionner au lieu de soustraire pour un côté de l'angle droit : le résultat dépasse alors l'hypoténuse.
- Conclure « rectangle » parce que les deux nombres sont proches (50,41 et 50) : l'égalité doit être exacte.
- Mélanger les unités : 1,2 m et 90 cm se calculent en 120 cm et 90 cm.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).