Nombres premiers et décomposition en facteurs premiers

Fiche méthode

(Mathématiques 4e · Nombres et calculs · Arithmétique)

La démarche pour décomposer un nombre et s'en servir

1. J'essaie les petits nombres premiers. Les critères disent vite si le nombre est divisible par 2, 3 ou 5 ; sinon, je pose la division par 7, 11…

2. Je divise et je recommence avec le quotient, jusqu'à obtenir 1. Si aucune division ne tombe juste avant que le carré du nombre essayé dépasse le nombre, celui-ci est premier.

3. J'écris la décomposition avec des exposants, dans l'ordre croissant, et je vérifie en recalculant le produit.

4. Je m'en sers : je supprime les facteurs communs d'une fraction, je garde les facteurs communs (plus petit exposant) pour un diviseur commun, je prends tous les facteurs (plus grand exposant) pour un multiple commun.

Le réflexe — un nombre premier a exactement deux diviseurs ; une décomposition ne contient que des nombres premiers, et elle est unique.

Cas 1 · Rappels de 5e : multiples, diviseurs et critères

Réflexe — unités pour 2, 5 et 10 ; deux derniers chiffres pour 4 ; somme des chiffres pour 3 et 9 ; sinon, je pose la division euclidienne.

Exemple. 2 376 est-il divisible par 2, 3, 4, 5, 9 ?

Unités 6 : divisible par 2, pas par 5. Deux derniers chiffres : $76 = 4 \times 19$, divisible par 4.
$2 + 3 + 7 + 6 = 18$: divisible par 3 et par 9.

Attention — un nombre pair n'est pas toujours divisible par 4, un multiple de 3 n'est pas toujours un multiple de 9.

Cas 2 · Reconnaître un nombre premier

Réflexe — j'essaie 2, 3, 5, 7, 11… et je m'arrête quand le carré du nombre essayé dépasse le nombre.

Exemple 1. 103 est-il premier ?

Ni par 2 (impair), ni par 3 ($1 + 0 + 3 = 4$), ni par 5, ni par 7 ($103 = 7 \times 14 + 5$).
$11 \times 11 = 121$ dépasse 103 : on s'arrête, 103 est premier.

Exemple 2. 133 est-il premier ?

Ni par 2, ni par 3 ($1 + 3 + 3 = 7$), ni par 5 ; mais $133 \div 7 = 19$: $133 = 7 \times 19$ n'est pas premier.

Attention — 1 n'est pas premier, 2 est le seul nombre premier pair.

Cas 3 · Décomposer en produit de facteurs premiers

Réflexe — je divise par 2 tant que c'est possible, puis par 3, 5, 7… jusqu'à obtenir 1.

Exemple. Décomposer 756.

$756 \div 2 = 378$; $378 \div 2 = 189$; $189 \div 3 = 63$; $63 \div 3 = 21$; $21 \div 3 = 7$; $7 \div 7 = 1$.
$756 = 2^2 \times 3^3 \times 7$. Vérification : $4 \times 27 \times 7 = 756$.

Attention — tous les facteurs doivent être premiers : on ne s'arrête pas sur un 4, un 9 ou un 15.

Cas 4 · Simplifier une fraction, fractions égales

Réflexe — je décompose en haut et en bas, puis je supprime les facteurs présents des deux côtés.

Exemple. Simplifier $\frac{270}{378}$.

$\frac{270}{378} = \frac{2 \times 3^3 \times 5}{2 \times 3^3 \times 7} = \frac{5}{7}$: on a supprimé $2 \times 3^3 = 54$ en haut et en bas.

Attention — un facteur n'est supprimé que s'il est en haut ET en bas, autant de fois qu'il y est des deux côtés.

Cas 5 · Diviseur commun, multiple commun

Réflexe — diviseur commun : facteurs communs, plus petit exposant ; multiple commun : tous les facteurs, plus grand exposant.

Exemple. Plus grand diviseur commun et plus petit multiple commun de 156 et 234.

$156 = 2^2 \times 3 \times 13$ et $234 = 2 \times 3^2 \times 13$.

Diviseur commun : $2 \times 3 \times 13 = 78$. Multiple commun : $2^2 \times 3^2 \times 13 = 468$.

Attention — le produit des deux nombres est un multiple commun, mais rarement le plus petit.

Les pièges

- Croire que 1 est premier : il n'a qu'un seul diviseur. Et oublier que 2 est premier.
- Conclure qu'un nombre impair est premier sans essayer 3 et 7 : $77 = 7 \times 11$.
- Laisser un facteur non premier : $28 = 4 \times 7$ n'est pas fini, $28 = 2^2 \times 7$.
- Supprimer un facteur qui n'est que d'un côté : dans $\frac{2^3 \times 3}{2 \times 5}$, il reste 2^2 en haut, donc $\frac{12}{5}$.
- Prendre le produit comme plus petit multiple commun : pour 6 et 10, c'est 30, pas 60.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).