

Corrigé et barème – Nombres premiers et décomposition en facteurs premiers

Définition d'un nombre premier, crible d'Ératosthène, test de primalité, décomposition en produit de facteurs premiers et fractions égales (programme de 4e)

Durée : 55 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 4^e

Exercice 1 – Premier ou non ?

(4 pts)

- a) $8 + 7 = 15$: divisible par 3, $87 = 3 \times 29$. Non premier. (1)
- b) Ni 2, ni 3 ($8 + 9 = 17$), ni 5, ni 7 ($7 \times 12 = 84$, reste 5) ; $11^2 = 121 > 89$. Premier. (1)
- c) $91 = 7 \times 13$. Non premier. (1)
- d) 1 n'a qu'un seul diviseur : pas premier. 2 a exactement deux diviseurs (1 et 2) : premier, le seul pair. (1)

Repère — pour un nombre inférieur à 121, tester 2, 3, 5 et 7 suffit ; si aucune division ne tombe juste, le nombre est premier.

Exercice 2 – Décompositions

(4 pts)

- a) $90 = 2 \times 3^2 \times 5$. (1)
- b) $168 = 2^3 \times 3 \times 7$. (1)
- c) $225 = 3^2 \times 5^2$. (1)
- d) $1\,000 = 2^3 \times 5^3$. (1)

Attention — une décomposition ne contient que des nombres premiers : $90 = 9 \times 10$ n'est qu'une étape, pas une réponse.

Exercice 3 – Calculs avec des décompositions

(4 pts)

- a) $8 \times 3 \times 25 = 600$. (1)
- b) $36^2 = (2^2 \times 3^2)^2 = 2^4 \times 3^4$. (1)
- c) $2 \times 3 \times 5^2 (= 150)$: il contient 2×5 mais un seul facteur 2. Les deux autres contiennent 2^2 . (1)
- d) $5\,040 = 2^4 \times 3^2 \times 5 \times 7$. (1)

Astuce — un nombre est divisible par d si tous les facteurs de d (avec leurs exposants) figurent dans sa décomposition.

Exercice 4 – Fractions égales

(4 pts)

- a) $\frac{2 \times 3 \times 5 \times 7}{2^2 \times 3^2 \times 7} = \frac{5}{6}$. (1)
- b) $\frac{3^2 \times 5 \times 11}{3 \times 11 \times 17} = \frac{15}{17}$. (1)
- c) $180 \div 12 = 15 : \frac{7 \times 15}{12 \times 15} = \frac{105}{180}$. (1)
- d) Non : $51 = 3 \times 17$ et $85 = 5 \times 17$, donc $\frac{51}{85} = \frac{3}{5}$. (1)

Le point clé — les décompositions révèlent les facteurs communs que les critères de divisibilité usuels ne montrent pas (17, 13, 11...).

Exercice 5 – Problème — les sachets du confiseur*(4 pts)*

- a) $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$; $300 = 2^2 \times 3 \times 5^2$. (1)
- b) Facteurs communs avec le plus petit exposant : $2^2 \times 3 \times 5 = 60$ sachets. (1)
- c) $360 \div 60 = 6$ sucettes et $300 \div 60 = 5$ caramels. (1)
- d) Non : $45 = 3^2 \times 5$ divise 360 mais pas 300 (un seul facteur 3 dans 300). (1)

À retenir — le nombre de sachets doit diviser les deux quantités : c'est un diviseur commun, et le plus grand se lit sur les facteurs communs des décompositions.