

Devoir surveillé – Angles et parallélisme, translation et rotation, triangles égaux — niveau ★★★

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 4^e

Nom : _____

Date : _____

Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Équations d'angles

(4 pts)

- Deux droites parallèles sont coupées par une sécante ; deux angles alternes-internes mesurent $(3x + 14)^\circ$ et $(5x - 38)^\circ$. Calcule x et la mesure de ces angles.
- Deux droites parallèles (d) et (d') sont coupées par une sécante (s) . Entre (d) et (d') , du même côté de (s) , on lit deux angles de mesures $(4y + 7)^\circ$ (en un point de (d)) et $(2y + 11)^\circ$ (en un point de (d')). Calcule y et ces deux angles.
- Les triangles ABC et DEF sont égaux, A, B, C ayant pour homologues D, E, F . On sait que $\widehat{A} = (2a + 5)^\circ$, $\widehat{D} = (3a - 19)^\circ$, $\widehat{B} = (a + b)^\circ$ et $\widehat{E} = (2b - 6)^\circ$. Calcule a puis b .
- Déduis-en les trois angles du triangle DEF . Ce triangle est-il isocèle ?

Exercice 2 – Recherche — toutes les solutions

(4 pts)

- Un triangle isocèle possède un angle de 40° . Trouve toutes les mesures possibles de ses deux autres angles, en justifiant que tu n'en oublies aucune.
- Même question avec un angle de 100° .
- Une rosace est formée de n triangles isocèles identiques de sommet principal O , déduits les uns des autres par des rotations de centre O et faisant exactement le tour de O . Exprime la mesure d'un angle à la base en fonction de n , puis trouve toutes les valeurs de n comprises entre 3 et 20 pour lesquelles cet angle est un nombre entier de degrés.

Exercice 3 – Deux triangles équilatéraux

(4 pts)

ABC est un triangle avec $\widehat{BAC} = 50^\circ$. On construit, à l'extérieur de ABC , les triangles équilatéraux ABD et ACE .

- Démontre que $\widehat{DAC} = \widehat{BAE}$ et donne leur mesure.
- Démontre que les triangles DAC et BAE sont égaux, en précisant les sommets homologues.
- Déduis-en que $DC = BE$ puis, sachant que $\widehat{ADC} = 22^\circ$, calcule $\widehat{ABE}$ et $\widehat{AEB}$.
- La rotation de centre A et d'angle 60° qui transforme D en B transforme aussi C en E (on l'admet). Explique comment elle permet de retrouver, sans les triangles égaux, que $DC = BE$.

Exercice 4 – Problème — la grande roue*(4 pts)*

Une grande roue de centre O porte 16 nacelles $N_1, N_2, \dots, N_{16}$, régulièrement réparties sur un cercle, dans cet ordre. Elle fait un tour complet en 8 min, à vitesse constante, dans le sens qui amène N_1 à la place de N_2 , puis de N_3 , etc.

- a) Calcule l'angle $\widehat{N_1ON_2}$, puis les deux autres angles du triangle ON_1N_2 .
- b) Démontre, sans mesurer, que $N_1N_4 = N_7N_{10}$.
- c) Au bout de combien de temps la nacelle N_1 arrive-t-elle pour la première fois à la place qu'occupait N_6 au départ ?
- d) À cet instant, quelle nacelle se trouve à la place qu'occupait N_1 au départ ? De quel angle la roue a-t-elle tourné au bout de 1 min 15 s ?

Exercice 5 – Défi — pourquoi 180° ?*(4 pts)*

Soit ABC un triangle. On note t la translation qui transforme B en C , A' l'image de A par t , et D un point de la demi-droite $[BC)$ situé au-delà de C . On veut démontrer, sans utiliser ce résultat, que la somme des angles d'un triangle vaut 180° .

- a) Justifie que les droites (CA') et (AB) sont parallèles, puis que $\widehat{ACA'} = \widehat{BAC}$.
- b) Justifie que $\widehat{A'CD} = \widehat{ABC}$.
- c) Conclus.
- d) Généralise : en découpant un polygone convexe à partir d'un de ses sommets, calcule la somme des angles d'un pentagone convexe, puis celle d'un polygone convexe à n côtés.

Bon courage !