

Corrigé et barème – Angles et parallélisme, translation et rotation, triangles égaux — niveau ★★★

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 4^e

Exercice 1 – Équations d'angles

(4 pts)

- a) Les droites étant parallèles, les angles alternes-internes sont égaux : $3x + 14 = 5x - 38$, soit $52 = 2x$, donc $x = 26$. Angles : $3 \times 26 + 14 = 92^\circ$ (vérification : $5 \times 26 - 38 = 130 - 38 = 92^\circ$). (0,5 pt : équation ; 0,5 pt : x et 92°) (1)
- b) L'angle adjacent à $(4y + 7)^\circ$, de l'autre côté de (s) , lui est supplémentaire ; il est alterne-interne avec l'angle $(2y + 11)^\circ$, donc égal à lui. Les deux angles sont donc supplémentaires : $4y + 7 + 2y + 11 = 180$, $6y = 162$, $y = 27$. Angles : $4 \times 27 + 7 = 115^\circ$ et $2 \times 27 + 11 = 65^\circ$ ($115 + 65 = 180$). (0,5 pt : supplémentaires justifiés ; 0,5 pt : résultats) (1)
- c) Angles homologues égaux : $2a + 5 = 3a - 19$, donc $a = 24$ et $\hat{A} = 53^\circ$. Puis $24 + b = 2b - 6$, donc $b = 30$ et $\hat{B} = 54^\circ$ (vérification : $2 \times 30 - 6 = 54$). (0,5 pt : a ; 0,5 pt : b) (1)
- d) $\hat{D} = \hat{A} = 53^\circ$, $\hat{E} = \hat{B} = 54^\circ$, $\hat{F} = 180^\circ - 53^\circ - 54^\circ = 73^\circ$. Les trois angles sont différents ; or un triangle isocèle a deux angles égaux : DEF n'est pas isocèle. (0,5 pt : 73° ; 0,5 pt : conclusion) (1)

Piège — deux angles situés entre les parallèles, du même côté de la sécante, ne sont pas égaux mais supplémentaires : écrire $4y + 7 = 2y + 11$ donnerait deux angles de 15° , impossible puisque l'un doit être aigu et l'autre obtus.

Exercice 2 – Recherche — toutes les solutions

(4 pts)

- a) Deux cas, et seulement deux : l'angle de 40° est au sommet principal, ou c'est un angle à la base.
Sommet principal : les angles à la base valent $\frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ$, d'où $40^\circ, 70^\circ, 70^\circ$. Angle à la base : l'autre angle à la base vaut aussi 40° et le sommet $180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$, d'où $40^\circ, 40^\circ, 100^\circ$. Deux solutions. (0,5 pt : cas séparés ; 0,5 pt par solution) (1,33333)
- b) Sommet principal : angles à la base $\frac{180^\circ - 100^\circ}{2} = 40^\circ$. Angle à la base : il y aurait deux angles de 100° , soit $200^\circ > 180^\circ$, impossible. Une seule solution : $100^\circ, 40^\circ, 40^\circ$. (0,5 pt : solution ; 0,5 pt : cas éliminé) (1,33333)
- c) L'angle au centre vaut $\frac{360^\circ}{n}$, donc un angle à la base vaut $\frac{1}{2} \left(180^\circ - \frac{360^\circ}{n} \right) = 90^\circ - \frac{180^\circ}{n}$. Il est entier si et seulement si $\frac{180}{n}$ est entier, c'est-à-dire si n divise $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$ (l'angle au centre, double de $\frac{180}{n}$, est alors entier lui aussi). Diviseurs de 180 entre 3 et 20 : 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20. Les autres (7, 8, 11, 13, 14, 16, 17, 19) ne divisent pas 180 ; par exemple $n = 8$ donne $67,5^\circ$. (0,5 pt : formule ; 0,5 pt : condition ; 0,5 pt : liste complète) (1,33333)

Méthode — pour être sûr de n'oublier aucune solution, on sépare les cas (l'angle est au sommet principal ou à la base), puis on élimine ceux qui sont impossibles, comme une somme d'angles supérieure à 180° .

Exercice 3 – Deux triangles équilatéraux

(4 pts)

- a) Les triangles équilatéraux ont des angles de 60° et sont construits à l'extérieur : $\widehat{DAC} = \widehat{DAB} + \widehat{BAC} = 60^\circ + 50^\circ = 110^\circ$ et $\widehat{BAE} = \widehat{BAC} + \widehat{CAE} = 50^\circ + 60^\circ = 110^\circ$. (0,5 pt par angle) (1)
- b) $AD = AB$ (triangle ABD équilatéral), $AC = AE$ (triangle ACE équilatéral) et l'angle compris $\widehat{DAC} = \widehat{BAE} = 110^\circ$: les triangles DAC et BAE sont égaux (cas d'un angle compris entre deux côtés). Homologues : D et B , A et A , C et E . (0,5 pt : égalités de côtés ; 0,5 pt : cas ; 0,5 pt : homologues) (1)
- c) $[DC]$ et $[BE]$ sont homologues, donc $DC = BE$. B est l'homologue de D : $\widehat{ABE} = \widehat{ADC} = 22^\circ$. Dans BAE : $\widehat{AEB} = 180^\circ - 110^\circ - 22^\circ = 48^\circ$. (0,5 pt : $DC = BE$ et 22° ; 0,5 pt : 48°) (1)
- d) Cette rotation transforme D en B et C en E , donc le segment $[DC]$ en le segment $[BE]$; une rotation conserve les longueurs, d'où $DC = BE$. (0,5 pt) (1)

Astuce — derrière deux triangles égaux se cache souvent une transformation : ici, un sixième de tour autour de A envoie DAC sur BAE et donne directement l'égalité des longueurs.

Exercice 4 – Problème — la grande roue

(4 pts)

- a) $\widehat{N_1ON_2} = 360^\circ \div 16 = 22,5^\circ$. $ON_1 = ON_2$ (rayons) : triangle isocèle en O , donc $\widehat{ON_1N_2} = \widehat{ON_2N_1} = \frac{180^\circ - 22,5^\circ}{2} = \frac{157,5^\circ}{2} = 78,75^\circ$. (0,5 pt : $22,5^\circ$; 0,5 pt : $78,75^\circ$) (1)
- b) $ON_1 = ON_7$ et $ON_4 = ON_{10}$ (rayons), et $\widehat{N_1ON_4} = \widehat{N_7ON_{10}} = 3 \times 22,5^\circ = 67,5^\circ$: les triangles ON_1N_4 et ON_7N_{10} sont égaux (angle compris entre deux côtés), donc $N_1N_4 = N_7N_{10}$. (Autre voie : la rotation de centre O et d'angle $6 \times 22,5^\circ = 135^\circ$ envoie N_1 sur N_7 et N_4 sur N_{10} , et conserve les longueurs.) (0,5 pt : éléments égaux ; 0,5 pt : conclusion) (1)
- c) De N_1 à N_6 , il y a 5 intervalles sur 16 : la roue doit faire $\frac{5}{16}$ de tour, soit $\frac{5}{16} \times 8 = \frac{40}{16} = 2,5 \text{ min} = 2 \text{ min } 30 \text{ s}$ (c'est-à-dire $5 \times 22,5^\circ = 112,5^\circ$). (0,5 pt : 5 intervalles ; 0,5 pt : 2 min 30 s) (1)
- d) Chaque nacelle a avancé de 5 places ; celle qui arrive à la place de N_1 était 5 places avant, soit $N_{16+1-5} = N_{12}$. En 1 min 15 s = 75 s, sur 480 s pour 360° : $\frac{75}{480} \times 360^\circ = 75 \times 0,75^\circ = 56,25^\circ$. (0,5 pt : N_{12} ; 0,5 pt : $56,25^\circ$) (1)

Erreur fréquente — de N_1 à N_6 , il y a 5 intervalles et non 6 : on compte les écarts entre les nacelles, comme les intervalles entre les piquets d'une clôture.

Exercice 5 – Défi — pourquoi 180° ?**(4 pts)**

- a) t transforme A en A' et B en C , donc la droite (AB) en la droite $(A'C)$; une translation transforme une droite en une droite parallèle : $(CA') \parallel (AB)$. Pour ces deux parallèles coupées par la sécante (AC) , les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ACA'}$ sont alternes-internes (B et A' sont de part et d'autre de (AC)), donc égaux. (0,5 pt : parallèles ; 0,5 pt : alternes-internes ; 0,5 pt : égalité) (1)
- b) Les parallèles (AB) et (CA') sont coupées par la sécante (BD) : $\widehat{ABC}$ et $\widehat{A'CD}$ sont correspondants, donc égaux. (On peut aussi dire que t transforme l'angle $\widehat{ABC}$ en $\widehat{A'CD}$ et conserve les angles.) (0,5 pt : correspondants ; 0,5 pt : égalité) (1)
- c) B, C, D sont alignés, et les demi-droites $[CA)$ et $[CA')$ partagent l'angle plat $\widehat{BCD}$: $\widehat{ACB} + \widehat{ACA'} + \widehat{A'CD} = 180^\circ$, c'est-à-dire $\widehat{ACB} + \widehat{BAC} + \widehat{ABC} = 180^\circ$. (0,5 pt) (1)
- d) Depuis un sommet, les diagonales vers les sommets non voisins découpent un polygone convexe à n côtés en $n - 2$ triangles, dont les angles recouvrent exactement ceux du polygone. Pentagone : 3 triangles, $3 \times 180^\circ = 540^\circ$. Polygone à n côtés : $(n - 2) \times 180^\circ$. (0,5 pt : 540° ; 0,5 pt : formule justifiée) (1)

Méthode — une translation transporte un angle sans le déformer : c'est l'outil idéal pour rassembler en un même point les trois angles d'un triangle et les juxtaposer en un angle plat.