

Corrigé et barème – Statistiques et probabilités — niveau



Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 4^e

Exercice 1 – Automatismes justifiés

(3 pts)

- a) Vrai. Diviseurs de 12 : 1, 2, 3, 4, 6, 12, soit 6 issues favorables sur 12 équiprobables : $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$. (0,5 pt pour la liste + 0,5 pt pour la probabilité) (1)
- b) Faux. Somme : $(2,4 + 2,6) + (3,1 + 3,9) = 5 + 7 = 12$, moyenne $12 \div 4 = 3$: c'est juste pour la moyenne. Série rangée : 2,4 ; 2,6 ; 3,1 ; 3,9 ; médiane = $\frac{2,6 + 3,1}{2} = 2,85 \neq 3$. (0,5 pt pour la moyenne + 0,5 pt pour la médiane) (1)
- c) Faux. S'ils sont incompatibles, $P(A \text{ ou } B) = 0,6 + 0,5 = 1,1$, ce qui est impossible car une probabilité ne dépasse pas 1. (0,5 pt pour la réponse + 0,5 pt pour l'argument) (1)

Astuce — regrouper les termes qui « tombent juste » ($2,4 + 2,6$ et $3,1 + 3,9$) rend le calcul mental rapide et sûr.

Exercice 2 – Calculs sans calculatrice

(4 pts)

- a) Somme : $8 \times 3 + 11 \times 5 + 12 \times 6 + 14 \times 7 + 17 \times 3 = 24 + 55 + 72 + 98 + 51 = 300$. Moyenne : $\frac{300}{24} = \frac{25}{2} = 12,5$. (0,5 pt pour la somme + 0,5 pt pour la moyenne) (1)
- b) 24 valeurs : la médiane est entre la 12^e et la 13^e note. Effectifs cumulés : 3 ; 8 ; 14 ; ... Les rangs 9 à 14 valent 12 : médiane = 12. (0,5 pt pour les effectifs cumulés + 0,5 pt pour la médiane) (1)
- c) Notes inférieures à 12 : $3 + 5 = 8$ copies sur 24 équiprobables : $P = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$. (0,5 pt pour le dénombrement + 0,5 pt pour la fraction irréductible) (1)
- d) Au moins 14 : $7 + 3 = 10$ copies, fréquence $\frac{10}{24} = \frac{5}{12}$. Or $0,4 = \frac{2}{5}$. Au dénominateur 60 : $\frac{5}{12} = \frac{25}{60}$ et $\frac{2}{5} = \frac{24}{60}$. Donc la fréquence est légèrement supérieure à 0,4. (0,5 pt pour la fréquence + 0,5 pt pour la comparaison) (1)

Méthode — pour comparer une fraction et un décimal sans calculatrice, on écrit le décimal en fraction, puis on met les deux fractions au même dénominateur.

Exercice 3 – Recherche — les notes mystères

(5 pts)

- a) Avec 5 valeurs rangées, la médiane est la 3^e : $c = 14$. Somme = $5 \times 12,4 = 62$. Étendue : $e - a = 6$, donc $e = a + 6$. (0,5 pt pour c et la somme + 0,5 pt pour e) (1)
- b) $e \geq c = 14$, donc $a + 6 \geq 14$ et $a \geq 8$. Ensuite $a + b + 14 + d + (a + 6) = 62$, soit $2a + b + d + 20 = 62$, d'où $b + d = 42 - 2a$. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)
- c) Si $a = 10$: $b + d = 42 - 20 = 22$, mais $b \geq 10$ et $d \geq 14$ imposent $b + d \geq 24$: impossible. Si $a > 10$, $b + d = 42 - 2a$ est encore plus petit (moins de 22) alors que $b + d \geq a + 14$ est encore plus grand (plus de 24) : impossible. Donc $a = 8$ ou $a = 9$. (0,5 pt pour le cas $a = 10$ + 0,5 pt pour la généralisation et la conclusion) (1)
- d) Cas $a = 8$: $e = 14$, donc $d = 14$ (car $14 \leq d \leq e$) et $b = 42 - 16 - 14 = 12$, avec $8 \leq 12 \leq 14$: série 8 ; 12 ; 14 ; 14 ; 14. Cas $a = 9$: $e = 15$, $b + d = 24$ et $d \in \{14, 15\}$. Si $d = 14$, $b = 10$: série 9 ; 10 ; 14 ; 14 ; 15. Si $d = 15$, $b = 9$: série 9 ; 9 ; 14 ; 15 ; 15. Tous les cas de a puis de d ont été examinés : il y a exactement 3 séries. Vérification : chaque somme vaut 62 et chaque étendue 6. (0,5 pt pour le cas $a = 8$ + 1 pt pour les deux séries du cas $a = 9$) (1)
- e) Probabilités de tirer 14 : $\frac{3}{5}$ dans la première série, $\frac{2}{5}$ dans la deuxième, $\frac{1}{5}$ dans la troisième. C'est la série 9 ; 10 ; 14 ; 14 ; 15. (0,5 pt) (1)

Méthode — dans une recherche de toutes les solutions, on fixe la variable qui a le moins de valeurs possibles (a), puis on épuise les cas un par un : c'est ce qui garantit qu'aucune solution n'est oubliée.

Exercice 4 – Problème — le stand des produits

(4 pts)

- a) Tableau (A en lignes, B en colonnes) : A = 1 : 1 ; 2 ; 3 ; 4. A = 2 : 2 ; 4 ; 6 ; 8. A = 3 : 3 ; 6 ; 9 ; 12. Il y a $3 \times 4 = 12$ issues équiprobables, dont 3 gagnantes (8, 9, 12) : $P(\text{gagner}) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$. (0,5 pt pour le tableau + 0,5 pt pour la probabilité) (1)
- b) Série rangée : 1 ; 2 ; 2 ; 3 ; 3 ; 4 ; 4 ; 6 ; 6 ; 8 ; 9 ; 12. Somme = 60, moyenne = $60 \div 12 = 5$. Médiane : entre la 6^e et la 7^e valeur, $\frac{4+4}{2} = 4$. Les grandes valeurs 9 et 12 tirent la moyenne vers le haut, alors que la médiane ne dépend que du rang. (0,5 pt pour les deux indicateurs + 0,5 pt pour l'explication) (1)
- c) Sur un grand nombre de parties, la fréquence des gains est proche de $\frac{1}{4}$: environ $200 \times \frac{1}{4} = 50$ gagnants. Recette : 200 euros ; coût des lots : $50 \times 3 = 150$ euros ; bénéfice estimé : $200 - 150 = 50$ euros. (0,5 pt pour le nombre de gagnants + 0,5 pt pour le bénéfice) (1)
- d) Soit p le prix d'un lot en euros : $200 - 50p = 100$, donc $50p = 100$ et $p = 2$. Il peut payer au plus environ 2 euros par lot. (0,5 pt pour l'équation + 0,5 pt pour la solution) (1)

Piège — sur 200 parties, il n'y aura pas exactement 50 gagnants : le bénéfice calculé est une estimation, d'autant plus fiable que le nombre de parties est grand.

Exercice 5 – Pour aller plus loin — le dé à n faces**(4 pts)**

- a) $n = 6$: somme 21, moyenne $21 \div 6 = 3,5$; médiane entre 3 et 4 : 3,5. $n = 7$: somme 28, moyenne $28 \div 7 = 4$; médiane : 4^e valeur, 4. (0,5 pt par valeur de n) (1)
- b) Terme à terme : $1 + n = n + 1$, $2 + (n - 1) = n + 1$, $\dots$, $n + 1 = n + 1$. On obtient n sommes égales à $n + 1$, donc $2S = n(n + 1)$ et $S = \frac{n(n + 1)}{2}$. Moyenne = $\frac{S}{n} = \frac{n + 1}{2}$. (0,5 pt pour $2S + 0,5$ pt pour la moyenne) (1)
- c) Ici, chaque numéro est égal à son rang. Si n est impair, la médiane est la valeur de rang $\frac{n + 1}{2}$, donc elle vaut $\frac{n + 1}{2}$. Si n est pair, elle est la moyenne des valeurs de rangs $\frac{n}{2}$ et $\frac{n}{2} + 1$:
 $\frac{1}{2} \left(\frac{n}{2} + \frac{n}{2} + 1 \right) = \frac{n + 1}{2}$. (0,5 pt par cas) (1)
- d) Si n est pair, $\frac{n + 1}{2}$ n'est pas entier ; les numéros strictement supérieurs sont $\frac{n}{2} + 1, \dots, n$, soit $\frac{n}{2}$ numéros : $P = \frac{n}{2} \div n = \frac{1}{2}$. Si n est impair, $\frac{n + 1}{2}$ est un numéro ; les numéros strictement supérieurs sont au nombre de $n - \frac{n + 1}{2} = \frac{n - 1}{2}$: $P = \frac{n - 1}{2n} < \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$. Réponse : exactement pour n pair. Contrôle : $n = 6$ donne $\frac{3}{6}$, $n = 7$ donne $\frac{3}{7}$. (0,5 pt pour le cas pair + 0,5 pt pour le cas impair et la conclusion) (1)

Astuce — avant une preuve générale, on teste de petites valeurs de n pour repérer ce qui change, puis on sépare les cas (ici n pair et n impair).

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).