# Corrigé et barème – relatifs et fractions — niveau ★★★

Durée : 55 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 4e

## Exercice 1 – Enquête — Les signes *(4 pts)*

a) $P$ a 15 facteurs, tous négatifs : 15 est impair, donc $P$ est négatif. Dans $Q$, les carrés sont positifs et les cubes de nombres négatifs sont négatifs : $Q$ a deux facteurs négatifs, $(-2)^3$ et $(-4)^3$ ; c'est un nombre pair, donc $Q$ est positif. (On peut aussi compter $2+3+2+3=10$ facteurs négatifs en tout.) (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

b) $x^2 = x \times x$ : deux facteurs négatifs, positif. $x^3$ : trois facteurs négatifs, négatif. $-x$ est l'opposé d'un nombre négatif : positif. $(-3) \times x^3$ est le produit de deux nombres négatifs ($-3$ et $x^3$) : positif. (0,5 pt pour $x^2$ et $x^3$ + 0,5 pt pour $-x$ et $(-3) \times x^3$) (1)

c) Le produit est négatif : les deux nombres sont de signes contraires. Le produit de leurs distances à zéro vaut 12 : 1 et 12, 2 et 6, ou 3 et 4. Pour deux nombres de signes contraires, la somme a pour distance à zéro la différence des distances : il faut une différence de 1, donc 3 et 4. La somme est négative, donc le plus éloigné de zéro est négatif : les nombres sont $-4$ et 3. Vérification : $-4+3=-1$ et $(-4)\times 3=-12$. (0,5 pt pour la démarche + 0,5 pt pour $-4$ et 3 vérifiés) (1)

d) Une multiplication à trou se complète par une division : $\dfrac{9}{10} \div \left(-\dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{9}{10} \times \left(-\dfrac{4}{3}\right)$. Signes contraires : négatif. $\dfrac{9\times 4}{10\times 3} = \dfrac{3\times 3\times 2\times 2}{2\times 5\times 3} = \dfrac{6}{5}$, donc le nombre manquant est $-\dfrac{6}{5}$. Vérification : $\left(-\dfrac{3}{4}\right)\times\left(-\dfrac{6}{5}\right) = \dfrac{18}{20} = \dfrac{9}{10}$. (0,5 pt + 0,5 pt pour la vérification) (1)

**Astuce** — pour le signe d'un produit, on ne compte que les facteurs négatifs : un carré est toujours positif, et le cube d'un nombre négatif reste négatif.

## Exercice 2 – Corriger une copie *(4 pts)*

a) L'élève a additionné les distances à zéro alors que $-10$ et 3 sont de signes contraires : $\dfrac{-10+3}{12} = -\dfrac{7}{12}$. Contrôle : en ajoutant un nombre positif à $-\dfrac{5}{6}$, on se rapproche de zéro, on ne s'en éloigne pas. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

b) L'élève a retourné la première fraction ; on garde $\dfrac{4}{9}$ et on multiplie par l'inverse du diviseur $\dfrac{2}{3} : \dfrac{4}{9} \times \dfrac{3}{2} = \dfrac{2\times 2\times 3}{3\times 3\times 2} = \dfrac{2}{3}$. Contrôle : $\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{9}$. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

c) Un cube a trois facteurs : $\left(-\dfrac{1}{2}\right)\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)$. Trois facteurs négatifs, c'est un nombre impair : le résultat est négatif, $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^3 = -\dfrac{1}{8}$. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

d) L'élève a calculé la soustraction avant le produit. Le produit d'abord : $\dfrac{5}{3}\times\dfrac{6}{5} = \dfrac{5\times 2\times 3}{3\times 5} = 2$, puis $\dfrac{1}{3} - 2 = \dfrac{1}{3} - \dfrac{6}{3} = -\dfrac{5}{3}$. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

**Erreur fréquente** — dans une division de fractions, on ne retourne que le diviseur, la fraction écrite après le signe « ÷ » ; la première fraction reste telle quelle.

## Exercice 3 – Comparer sans se tromper *(4 pts)*

a) $c$ a deux signes moins : $c = \dfrac{13}{14}$ est positif, c'est le plus grand. $a$, $b$ et $d$ sont négatifs : on compare leurs distances à zéro. $\dfrac{11}{12} = \dfrac{143}{156}$ et $\dfrac{12}{13} = \dfrac{144}{156}$, donc $\dfrac{11}{12} < \dfrac{12}{13}$, et ces deux fractions sont plus petites que 1 (numérateur plus petit que le dénominateur). Le plus loin de zéro est le plus petit : $d < b < a < c$, c'est-à-dire $-1 < -\dfrac{12}{13} < -\dfrac{11}{12} < \dfrac{-13}{-14}$. (0,5 pt pour le signe de $c$ + 0,5 pt pour la comparaison de $a$ et $b$ ; on accepte aussi : il manque $\dfrac{1}{12}$ à $\dfrac{11}{12}$ pour faire 1, et seulement $\dfrac{1}{13}$ à $\dfrac{12}{13}$) (1)

b) $-\dfrac{2}{3} = -\dfrac{10}{15}$ et $-\dfrac{1}{5} = -\dfrac{3}{15}$. On cherche $\dfrac{n}{15}$ avec $n$ entier et $-10 < n < -3$ : $n = -9$ ; $-8$ ; $-7$ ; $-6$ ; $-5$ ; $-4$. Il y a six fractions : $-\dfrac{9}{15}$ ; $-\dfrac{8}{15}$ ; $-\dfrac{7}{15}$ ; $-\dfrac{6}{15}$ ; $-\dfrac{5}{15}$ ; $-\dfrac{4}{15}$. (0,5 pt pour les conversions + 0,5 pt pour la liste complète) (1)

c) Sans le signe : $100 = 7 \times 14 + 2$, donc $14 < \dfrac{100}{7} < 15$ et, en passant aux opposés, $-15 < \dfrac{-100}{7} < -14$. Comme $\dfrac{100}{7} = 14 + \dfrac{2}{7}$ et $\dfrac{2}{7} < \dfrac{1}{2}$, le nombre est plus près de $-14$ que de $-15$ : l'entier le plus proche est $-14$. (0,5 pt pour l'encadrement + 0,5 pt pour $-14$ justifié) (1)

d) Le nombre à ajouter est la différence $-\dfrac{1}{6} - \left(-\dfrac{3}{4}\right) = -\dfrac{2}{12} + \dfrac{9}{12} = \dfrac{7}{12}$. Vérification : $-\dfrac{9}{12} + \dfrac{7}{12} = -\dfrac{2}{12} = -\dfrac{1}{6}$. Comme $\dfrac{1}{2} = \dfrac{6}{12}$ et $7 > 6$, ce nombre est plus grand que $\dfrac{1}{2}$. (0,5 pt pour $\dfrac{7}{12}$ + 0,5 pt pour la comparaison) (1)

**Piège** — entre deux nombres négatifs, le plus petit est le plus loin de zéro : $\dfrac{11}{12} < \dfrac{12}{13}$, mais $-\dfrac{11}{12} > -\dfrac{12}{13}$.

## Exercice 4 – Calculs en plusieurs étapes *(4 pts)*

a) Numérateur : $\dfrac{3}{6} - \dfrac{5}{6} = -\dfrac{2}{6} = -\dfrac{1}{3}$. Dénominateur : $\dfrac{8}{12} - \dfrac{9}{12} = -\dfrac{1}{12}$. Puis $H = \left(-\dfrac{1}{3}\right) \div \left(-\dfrac{1}{12}\right) = \left(-\dfrac{1}{3}\right) \times (-12) = \dfrac{12}{3} = 4$ (même signe : positif). (0,5 pt pour le numérateur et le dénominateur + 0,5 pt pour 4) (1)

b) Le carré d'abord : $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{4}{9}$. Puis le quotient et le produit : $\dfrac{4}{9} \div \left(-\dfrac{4}{9}\right) = -1$ (un nombre non nul divisé par son opposé) et $\dfrac{3}{5} \times \left(-\dfrac{10}{9}\right) = -\dfrac{3 \times 2 \times 5}{5 \times 3 \times 3} = -\dfrac{2}{3}$. Enfin $K = -1 - \left(-\dfrac{2}{3}\right) = -\dfrac{3}{3} + \dfrac{2}{3} = -\dfrac{1}{3}$. (0,5 pt pour $-1$ et $-\dfrac{2}{3}$ + 0,5 pt pour $-\dfrac{1}{3}$) (1)

c) $\left(-\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2}\right) \times \left(-\dfrac{4}{3}\right) - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{4} \times \left(-\dfrac{4}{3}\right) - \dfrac{1}{3} = -\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3} = -\dfrac{2}{3}$. La dernière opération est une soustraction : c'est une différence. (0,5 pt pour l'expression avec ses parenthèses + 0,5 pt pour $-\dfrac{2}{3}$ et « différence ») (1)

d) On remonte le programme avec les opérations inverses. Avant « soustraire $\dfrac{1}{3}$ », on avait $-3 + \dfrac{1}{3} = -\dfrac{8}{3}$. Avant « multiplier par $-\dfrac{4}{3}$ », on avait $-\dfrac{8}{3} \div \left(-\dfrac{4}{3}\right) = \dfrac{8}{3} \times \dfrac{3}{4} = 2$. Avant « ajouter $\dfrac{1}{2}$ », on avait $2 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$. Il faut choisir $\dfrac{3}{2}$. Vérification : $\left(\dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}\right) \times \left(-\dfrac{4}{3}\right) - \dfrac{1}{3} = 2 \times \left(-\dfrac{4}{3}\right) - \dfrac{1}{3} = -\dfrac{8}{3} - \dfrac{1}{3} = -3$. (0,5 pt pour la démarche + 0,5 pt pour $\dfrac{3}{2}$ vérifié) (1)

**Méthode** — pour remonter un programme de calcul, on part de la fin et on défait chaque étape avec l'opération inverse : soustraire devient ajouter, multiplier par un nombre devient diviser par ce nombre.

## Exercice 5 – Problème — Le nom du foyer *(4 pts)*

a) Les $\frac{2}{5}$ des $\frac{5}{6}$ des élèves : $\frac{2}{5} \times \frac{5}{6} = \frac{2 \times 5}{5 \times 2 \times 3} = \frac{1}{3}$. Un tiers des élèves du collège a choisi A. (1 pt) (1)

b) $1 - \frac{2}{5} - \frac{3}{8} = \frac{40}{40} - \frac{16}{40} - \frac{15}{40} = \frac{9}{40}$ des votants ont choisi C. (1 pt) (1)

c) C représente $\frac{9}{40} \times \frac{5}{6} = \frac{3 \times 3 \times 5}{5 \times 8 \times 2 \times 3} = \frac{3}{16}$ des élèves. Les $\frac{3}{16}$ des élèves valent $81$ : $\frac{1}{16}$ des élèves vaut $81 \div 3 = 27$, et le collège compte $27 \times 16 = 432$ élèves. Vérification : $432 \div 6 \times 5 = 360$ votants, et $360 \div 40 \times 9 = 81$. (0,5 pt pour $\frac{3}{16}$ + 0,5 pt pour 432 ; on accepte aussi : 81 voix font les $\frac{9}{40}$ des votants, donc $81 \div 9 \times 40 = 360$ votants, puis $360 \div 5 \times 6 = 432$ élèves) (1)

d) Avec 360 votants : A obtient $\frac{2}{5} \times 360 = 144$ voix et B obtient $\frac{3}{8} \times 360 = 135$ voix ; A a $144 - 135 = 9$ voix d'avance. 1re façon : $\frac{9}{360} = \frac{1}{40}$ des votants. 2e façon : $\frac{2}{5} - \frac{3}{8} = \frac{16}{40} - \frac{15}{40} = \frac{1}{40}$. (0,5 pt pour les 9 voix + 0,5 pt pour $\frac{1}{40}$ obtenu de deux façons) (1)

**Erreur fréquente** — les fractions de l'énoncé ne portent pas toutes sur le même tout : $\frac{2}{5}$ est une part des votants, pas des élèves ; pour revenir aux élèves, on multiplie par $\frac{5}{6}$.

*Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).*