

Devoir surveillé – Pythagore, Thalès et cosinus — niveauDurée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 4^e

Nom : _____

Date : _____

Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Automatismes justifiés**(3 pts)**

- a) Les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle mesurent 5 cm et 6 cm. Encadre la longueur de l'hypoténuse entre deux entiers consécutifs.
- b) ABC est rectangle en A avec $BC = 15$ cm et $\cos(\widehat{ABC}) = 0,6$. Calcule AB , puis AC .
- c) Un élève écrit : « ABC est rectangle en A , $BC = 4$ cm et $\cos(\widehat{ABC}) = 0,9$, donc $AB = 4,5$ cm. » Montre sans calcul que son résultat est impossible, puis corrige-le.

Exercice 2 – Calculs longs à la main**(4 pts)**

ABC est rectangle en B avec $AB = 20$ cm et $BC = 21$ cm. E est le point de $[AB]$ tel que $AE = 8$ cm ; F est le point de $[AC]$ tel que $(EF) \parallel (BC)$.

- a) Calcule AC .
- b) Calcule EF et AF .
- c) Démontre, par la réciproque du théorème de Pythagore, que le triangle AEF est rectangle en E (calculs posés à la main).
- d) Calcule le périmètre du quadrilatère $EBCF$.

Exercice 3 – Enquête — toutes les solutions**(4 pts)**

On cherche tous les triangles rectangles dont les trois côtés mesurent un nombre entier de centimètres et dont l'hypoténuse mesure 25 cm. On note a et b les côtés de l'angle droit, avec $a \leq b$.

- a) Montre que $a^2 \leq 312,5$, puis que $a \leq 17$.
- b) Trouve tous les couples $(a ; b)$ possibles et justifie que tu n'en oublies aucun.
- c) Pour chaque triangle trouvé, donne le cosinus de son plus petit angle sous forme de fraction irréductible.
- d) Dans le triangle ABC rectangle en B avec $AB = 20$ cm, $BC = 15$ cm et $AC = 25$ cm, on place $M \in [AB]$ avec $AM = 4$ cm et $N \in [AC]$ avec $AN = 5$ cm. Montre que $(MN) \parallel (BC)$ et calcule MN .

Exercice 4 – Problème — l'échelle du peintre**(5 pts)**

Une échelle $[AC]$ de 6,5 m est posée contre un mur vertical ; son pied A est à 2,5 m du pied B du mur, sur un sol horizontal. Règle de sécurité : l'angle $\widehat{BAC}$ entre l'échelle et le sol doit être compris entre 65° et 75° . On donne $\cos(65^\circ) \approx 0,423$ et $\cos(75^\circ) \approx 0,259$, et l'on admet que plus un angle aigu est grand, plus son cosinus est petit.

- À quelle hauteur l'échelle touche-t-elle le mur ?
- L'échelle est-elle placée de façon conforme ?
- Un pot de peinture est accroché à l'échelle en un point P situé à 2,6 m de A (mesurés le long de l'échelle). À quelle hauteur se trouve-t-il ?
- Quelle est la distance minimale autorisée entre le pied de l'échelle et le mur, au centimètre près ?

Exercice 5 – Pour aller plus loin**(4 pts)**

ABC est un triangle rectangle en A et H est le pied de la hauteur issue de A ; on admet que H est sur le segment $[BC]$. On va démontrer le théorème de Pythagore à l'aide du cosinus.

- Écris $\cos(\widehat{ABC})$ de deux façons, dans le triangle ABC puis dans le triangle ABH . Dédus-en que $AB^2 = BH \times BC$.
- Démontre de même que $AC^2 = CH \times CB$.
- Dédus-en que $AB^2 + AC^2 = BC^2$.
- Application : $BC = 25$ cm et $BH = 9$ cm. Calcule AB et AC sans calculatrice, et vérifie le résultat.

Bon courage !