

Corrigé et barème – Pythagore, Thalès et cosinus — niveau



Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 4^e

Exercice 1 – Automatismes justifiés

(3 pts)

- a) L'hypoténuse c vérifie $c^2 = 25 + 36 = 61$, donc $c = \sqrt{61}$. Comme $49 < 61 < 64$, on a $7 < \sqrt{61} < 8$. (0,5 pt pour $\sqrt{61}$, 0,5 pt pour l'encadrement) (1)
- b) $\cos(\widehat{ABC}) = \frac{AB}{BC}$, donc $AB = 15 \times 0,6 = 9$ cm. Puis $AC^2 = 15^2 - 9^2 = 225 - 81 = 144$, donc $AC = 12$ cm. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)
- c) $[AB]$ est un côté de l'angle droit : il est forcément plus court que l'hypoténuse $BC = 4$ cm, donc 4,5 cm est impossible. En fait $AB = 4 \times 0,9 = 3,6$ cm (l'élève a divisé au lieu de multiplier). (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

Méthode — sans calculatrice, on encadre une racine carrée entre deux carrés parfaits consécutifs ; c'est aussi un bon contrôle de vraisemblance.

Exercice 2 – Calculs longs à la main

(4 pts)

- a) $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 400 + 441 = 841$. Or $29^2 = 841$, donc $AC = 29$ cm. (0,5 pt pour le calcul, 0,5 pt pour reconnaître 29^2) (1)
- b) D'après le théorème de Thalès, $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC}$, avec $\frac{AE}{AB} = \frac{8}{20} = 0,4$. Donc $EF = 0,4 \times 21 = 8,4$ cm et $AF = 0,4 \times 29 = 11,6$ cm. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)
- c) Le plus long côté est $[AF]$: $AF^2 = 11,6^2 = 134,56$; $AE^2 + EF^2 = 64 + 8,4^2 = 64 + 70,56 = 134,56$. L'égalité est vérifiée, donc AEF est rectangle en E . (0,5 pt pour les carrés, 0,5 pt pour la conclusion) (1)
- d) $EB = 20 - 8 = 12$ cm et $FC = 29 - 11,6 = 17,4$ cm. Périmètre : $12 + 21 + 17,4 + 8,4 = 58,8$ cm. (0,5 pt pour les longueurs, 0,5 pt pour la somme) (1)

Astuce — un coefficient de réduction décimal simple (ici 0,4) transforme les calculs de Thalès en multiplications faciles à poser.

Exercice 3 – Enquête — toutes les solutions

(4 pts)

- a) Comme $a \leq b$, $a^2 \leq b^2$, donc $2a^2 \leq a^2 + b^2 = 625$ et $a^2 \leq 312,5$. Or $17^2 = 289$ et $18^2 = 324 > 312,5$, donc $a \leq 17$. (1 pt) (1)
- b) On teste $a = 1, 2, \dots, 17$ et l'on regarde si $625 - a^2$ est un carré :
624, 621, 616, 609, 600, 589, 576, 561, 544, 525, 504, 481, 456, 429, 400, 369, 336. Seuls $576 = 24^2$ ($a = 7$) et $400 = 20^2$ ($a = 15$) conviennent. Les deux solutions sont (7 ; 24) et (15 ; 20) ; aucune n'est oubliée puisque toutes les valeurs possibles de a ont été testées. (0,5 pt pour la méthode exhaustive, 0,5 pt pour les deux solutions) (1)
- c) Le plus petit angle est opposé au plus petit côté a ; il est donc adjacent au côté b : $\cos = \frac{b}{25}$.
Triangle (7 ; 24 ; 25) : $\frac{24}{25}$. Triangle (15 ; 20 ; 25) : $\frac{20}{25} = \frac{4}{5}$. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)
- d) $\frac{AM}{AB} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$ et $\frac{AN}{AC} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$; les points A, M, B et A, N, C sont alignés dans le même ordre, donc d'après la réciproque du théorème de Thalès, $(MN) \parallel (BC)$. Puis $MN = \frac{1}{5} \times 15 = 3$ cm : le triangle AMN a pour côtés 3, 4 et 5 cm. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

Méthode — pour prouver qu'on a toutes les solutions, on borne d'abord l'inconnue, puis on teste chaque valeur restante : la liste complète vaut justification.

Exercice 4 – Problème — l'échelle du peintre

(5 pts)

- a) ABC est rectangle en B : $BC^2 = 6,5^2 - 2,5^2 = 42,25 - 6,25 = 36$, donc $BC = 6$ m. (0,5 pt + 0,5 pt) (1,25)
- b) $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{AB}{AC} = \frac{2,5}{6,5} = \frac{5}{13} \approx 0,385$ (division posée). Comme $0,259 < 0,385 < 0,423$ et que le cosinus diminue quand l'angle augmente, $65^\circ < \widehat{BAC} < 75^\circ$: l'échelle est conforme. (0,5 pt pour le cosinus, 0,5 pt pour la comparaison, 0,5 pt pour la conclusion) (1,25)
- c) Soit Q le point de $[AB]$ à la verticale de P . (PQ) et (BC) sont perpendiculaires au sol, donc parallèles ; d'après le théorème de Thalès, $\frac{AP}{AC} = \frac{PQ}{BC}$, soit $\frac{2,6}{6,5} = 0,4 = \frac{PQ}{6}$, donc $PQ = 2,4$ m. (0,5 pt pour le parallélisme, 0,5 pt pour l'égalité, 0,5 pt pour le résultat) (1,25)
- d) La distance $AB = 6,5 \times \cos(\widehat{BAC})$ est la plus petite quand l'angle est le plus grand, soit 75° :
 $AB \approx 6,5 \times 0,259 = 1,6835$, donc environ 1,68 m. (0,5 pt pour le choix de 75° , 0,5 pt pour le calcul) (1,25)

Piège — le cosinus varie en sens inverse de l'angle : l'angle maximal donne la distance au mur minimale, et non l'inverse.

Exercice 5 – Pour aller plus loin**(4 pts)**

- a) Dans ABC rectangle en A : $\cos(\widehat{ABC}) = \frac{AB}{BC}$. Dans ABH rectangle en H : $\cos(\widehat{ABH}) = \frac{BH}{AB}$, et $\widehat{ABH} = \widehat{ABC}$. Donc $\frac{AB}{BC} = \frac{BH}{AB}$ et, par produit en croix, $AB^2 = BH \times BC$. (0,5 pt pour les deux cosinus, 0,5 pt pour l'égalité) (1)
- b) De même, avec l'angle $\widehat{ACB}$: $\cos(\widehat{ACB}) = \frac{AC}{BC}$ dans ABC et $\frac{CH}{AC}$ dans ACH rectangle en H .
Donc $\frac{AC}{BC} = \frac{CH}{AC}$ et $AC^2 = CH \times CB$. (1 pt) (1)
- c) En additionnant : $AB^2 + AC^2 = BH \times BC + CH \times BC = (BH + HC) \times BC$. Comme $H \in [BC]$, $BH + HC = BC$, donc $AB^2 + AC^2 = BC \times BC = BC^2$. (0,5 pt pour la factorisation, 0,5 pt pour $BH + HC = BC$) (1)
- d) $AB^2 = 9 \times 25 = 225$, donc $AB = 15$ cm. $CH = 25 - 9 = 16$ cm, donc $AC^2 = 16 \times 25 = 400$ et $AC = 20$ cm. Vérification : $15^2 + 20^2 = 225 + 400 = 625 = 25^2$. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

Erreur fréquente — on ne peut pas utiliser Pythagore pour démontrer Pythagore : ici, seules la définition du cosinus et l'égalité $BH + HC = BC$ servent.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).