

Corrigé et barème – Pythagore, Thalès et cosinus — niveau



Durée : 55 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 4^e

Exercice 1 – Qui a raison ?

(4 pts)

- a) Faux : quelle que soit la taille du triangle, le côté adjacent reste plus court que l'hypoténuse, donc leur quotient est strictement inférieur à 1. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)
- b) Vrai : $4^2 = 16$ et $2,4^2 + 3,2^2 = 5,76 + 10,24 = 16$; d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle est rectangle. (0,5 pt pour les calculs, 0,5 pt pour la conclusion) (1)
- c) Vrai : $\cos(\widehat{ABC}) = \frac{AB}{BC} = \frac{6}{12} = 0,5$ et $\cos^{-1}(0,5) = 60^\circ$. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)
- d) Vrai : $\frac{AM}{AB} = \frac{3}{8} = 0,375$ et $\frac{AN}{AC} = \frac{4,5}{12} = 0,375$. Les rapports sont égaux et les points sont alignés dans le même ordre, donc d'après la réciproque du théorème de Thalès, $(MN) \parallel (BC)$. (0,5 pt pour les rapports, 0,5 pt pour la conclusion) (1)

Piège — pour la réciproque de Thalès, on compare deux rapports calculés séparément ; conclure à partir d'un seul rapport ne prouve rien.

Exercice 2 – Calculs en cascade

(4 pts)

- a) ABC est rectangle en A : $AC^2 = BC^2 - AB^2 = 81 - 51,84 = 29,16$, donc $AC = 5,4$ cm. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)
- b) $\cos(\widehat{ABC}) = \frac{AB}{BC} = \frac{7,2}{9} = 0,8$, donc $\widehat{ABC} = \cos^{-1}(0,8) \approx 36,9^\circ$. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)
- c) ABH est rectangle en H , d'hypoténuse $[AB]$: $\cos(\widehat{ABH}) = \frac{BH}{AB}$. Or $\widehat{ABH} = \widehat{ABC}$, donc $BH = 7,2 \times 0,8 = 5,76$ cm. (0,5 pt pour la formule, 0,5 pt pour le résultat) (1)
- d) Dans ABH rectangle en H : $AH^2 = AB^2 - BH^2 = 51,84 - 33,1776 = 18,6624$, donc $AH = 4,32$ cm. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

Astuce — un même angle peut appartenir à deux triangles rectangles : son cosinus s'écrit de deux façons, ce qui permet de passer d'un triangle à l'autre.

Exercice 3 – Hauteur inaccessible

(4 pts)

- a) Le bâton et l'arbre sont verticaux, donc (MN) et (BC) sont perpendiculaires à la même droite (AB) : elles sont parallèles. (1 pt) (1)
- b) $M \in [AB]$, $N \in [AC]$ et $(MN) \parallel (BC)$: d'après le théorème de Thalès, $\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$, soit $\frac{2,4}{14,4} = \frac{1,5}{BC}$, donc $BC = \frac{1,5 \times 14,4}{2,4} = 9$ m. (0,5 pt pour l'égalité, 0,5 pt pour le résultat) (1)
- c) AMN est rectangle en M : $AN^2 = AM^2 + MN^2 = 5,76 + 2,25 = 8,01$, donc $AN = \sqrt{8,01} \approx 2,83$ m. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)
- d) $\cos(\widehat{MAN}) = \frac{AM}{AN} = \frac{2,4}{\sqrt{8,01}} \approx 0,848$, donc $\widehat{MAN} \approx 32^\circ$. (0,5 pt + 0,5 pt ; on accepte le calcul avec 2,83) (1)

Méthode — pour calculer un angle, utilise de préférence la valeur exacte ($\sqrt{8,01}$) plutôt qu'un arrondi : les erreurs d'arrondi s'accumulent d'une étape à l'autre.

Exercice 4 – Corriger une copie

(4 pts)

- a) $[BC]$ est l'hypoténuse : il faut soustraire. $AC^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$, donc $AC = 12$ cm.
(0,5 pt pour l'erreur, 0,5 pt pour le résultat) (1)
- b) DE est le côté adjacent et DF l'hypoténuse : $\cos(40^\circ) = \frac{DE}{DF}$, donc $DE = 10 \times \cos(40^\circ) \approx 7,7$ cm.
Un côté de l'angle droit ne peut pas dépasser l'hypoténuse. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)
- c) Le rapport doit comparer le petit triangle au grand : $AB = 2 + 3 = 5$ cm et $\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$, soit $\frac{2}{5} = \frac{4}{BC}$, donc $BC = \frac{4 \times 5}{2} = 10$ cm. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)
- d) Le quotient est inversé : $\cos(\widehat{HGI}) = \frac{GH}{GI} = \frac{3}{5} = 0,6$, et $\widehat{HGI} = \cos^{-1}(0,6) \approx 53,1^\circ$. Un cosinus supérieur à 1 devait alerter. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

Erreur fréquente — les quatre erreurs viennent d'un côté mal identifié : l'hypoténuse traitée comme un côté de l'angle droit, ou un segment MB pris pour AB .

Exercice 5 – Problème — la charpente

(4 pts)

- a) Dans un triangle isocèle, la hauteur issue du sommet principal coupe la base en son milieu : $BH = 4$ m et ABH est rectangle en H . $AB^2 = AH^2 + BH^2 = 9 + 16 = 25$, donc $AB = 5$ m. (0,5 pt pour BH , 0,5 pt pour le calcul) (1)
- b) Dans ABH rectangle en H : $\cos(\widehat{ABC}) = \frac{BH}{AB} = \frac{4}{5} = 0,8$, donc $\widehat{ABC} \approx 37^\circ$. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)
- c) $M \in [AB]$, $N \in [AC]$, $(MN) \parallel (BC)$: d'après le théorème de Thalès, $\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$, soit $\frac{2}{5} = \frac{MN}{8}$, donc $MN = \frac{2 \times 8}{5} = 3,2$ m. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)
- d) On veut $MN = 5$ m : $\frac{AM}{5} = \frac{5}{8}$, donc $AM = \frac{25}{8} = 3,125$ m, soit environ 3,13 m. (0,5 pt pour l'égalité, 0,5 pt pour le résultat) (1)

Astuce — la hauteur d'un triangle isocèle le découpe en deux triangles rectangles identiques : c'est la porte d'entrée pour Pythagore et le cosinus.