Devoir surveillé – puissances, racine carrée et nombres premiers — niveau ★★★

Durée : 55 min – Calculatrice interdite aux exercices 1 et 2, autorisée ensuite – Sur 20 points · Mathématiques 4e

Nom : _____ Date : _____ Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Corriger une copie *(4 pts)*

Chaque ligne de cette copie contient une erreur. Explique-la, puis corrige-la.

a) $5^3 + 5^3 + 5^3 + 5^3 + 5^3 = 5^{15}$

b) $\sqrt{1{,}6} = 0{,}4$

c) $45\,000 \times 0{,}002 = 4{,}5 \times 10^4 \times 2 \times 10^{-3} = 9 \times 10^{-12}$

d) $\dfrac{2^3 \times 3 \times 5}{2 \times 3^2 \times 5} = 2^2 = 4$

Exercice 2 – Comparer de très grands nombres *(4 pts)*

On rappelle que $2^{10} = 1\,024$.

a) Compare 2^{30} et 10^9, sans calculer 2^{30}.

b) Calcule $\sqrt{10^8}$ et 2^{13}.

c) Range dans l'ordre croissant : $\sqrt{10^8}$; 5×10^3 ; 2^{13} ; $9{,}9 \times 10^3$.

d) Écris $\dfrac{8^4 \times 4^5}{2^{15}}$ sous la forme d'une puissance de 2, puis donne sa valeur.

Exercice 3 – Qui a raison ? *(3 pts)*

On étudie les nombres de la forme $2^n - 1$, où n est un nombre entier au moins égal à 2.

a) Calcule $2^n - 1$ pour $n = 2$, 3, 5 et 7, puis montre que les quatre résultats sont des nombres premiers.

b) Léa affirme : « Quand n est un nombre premier, $2^n - 1$ est toujours un nombre premier. » Teste son affirmation avec $n = 11$. A-t-elle raison ?

c) Hugo affirme : « Quand n n'est pas premier, $2^n - 1$ n'est pas premier. » Décompose $2^n - 1$ en produit de facteurs premiers pour $n = 4$, 6 et 9. Ces exemples prouvent-ils qu'il a raison ?

Exercice 4 – Enquête — Diviseurs et carrés parfaits *(4 pts)*

a) Décompose 200 en produit de facteurs premiers, puis écris la liste de tous ses diviseurs. Combien en a-t-il ?

b) Sans les écrire, trouve combien de diviseurs a le nombre $2^4 \times 3^2$. Justifie.

c) Lina affirme : « Un nombre entier qui a un nombre impair de diviseurs est un carré parfait. » Explique, en regroupant les diviseurs d'un nombre par paires, pourquoi elle a raison. Tu pourras t'appuyer sur les deux nombres précédents.

d) Trouve un nombre entier compris entre 2 et 100 qui a exactement 9 diviseurs. Justifie.

Exercice 5 – Problème — Des carrés de plus en plus petits *(5 pts)*

Une plaque de carton carrée a une aire de 400 cm². À la première étape, on la découpe en 4 carrés identiques, en coupant au milieu des côtés. À chaque étape suivante, on découpe chacun des carrés obtenus de la même façon, en 4 carrés identiques.

a) Calcule le côté de la plaque de départ, puis le côté d'un carré après la première étape.

b) Après 3 étapes, combien y a-t-il de carrés ? Écris ce nombre comme une puissance de 4, puis comme une puissance de 2. Quel est alors le côté d'un carré ?

c) Après n étapes, exprime le nombre de carrés et le côté d'un carré en fonction de n.

d) À partir de combien d'étapes le côté d'un carré devient-il plus petit que 1 µm ? Justifie.

e) Combien y a-t-il alors de carrés ? Donne ce nombre en notation scientifique, en arrondissant a au centième.

Bon courage !

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).