Corrigé et barème – puissances, racine carrée et nombres premiers — niveau ★★★

Durée : 55 min – Calculatrice interdite aux exercices 1 et 2, autorisée ensuite – Sur 20 points · Mathématiques 4e

Exercice 1 – Corriger une copie *(4 pts)*

a) L'élève a ajouté les exposants ($3+3+3+3+3=15$), comme pour un produit. Or c'est une somme de cinq termes égaux à 5^3 : $5^3+5^3+5^3+5^3+5^3 = 5\times 5^3 = 5^1\times 5^3 = 5^4 = 625$. Contrôle : $5^3 = 125$ et $5\times 125 = 625$, alors que 5^{15} dépasse 30 milliards. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

b) $0{,}4^2 = 0{,}16$, pas 1,6 : l'élève a confondu 1,6 et 0,16. Comme $1{,}2^2 = 1{,}44$ et $1{,}3^2 = 1{,}69$, et $1{,}44 < 1{,}6 < 1{,}69$, on a $1{,}2 < \sqrt{1{,}6} < 1{,}3$: on garde la valeur exacte $\sqrt{1{,}6}$, que l'on peut encadrer ainsi. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

c) L'élève a multiplié les exposants ($4\times(-3) = -12$). Pour un produit, on les ajoute : $10^4\times 10^{-3} = 10^1$, et $4{,}5\times 2 = 9$, donc le produit vaut $9\times 10^1 = 90$. Contrôle : 0,002, ce sont 2 millièmes, et 2 millièmes de 45 000 font 90 ; 9×10^{-12} serait minuscule. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

d) L'élève a supprimé tous les facteurs 3, alors qu'un seul 3 est commun : il y en a un en haut et deux en bas. Il reste un 3 au dénominateur : $\dfrac{2^3\times 3\times 5}{2\times 3^2\times 5} = \dfrac{2^2}{3} = \dfrac{4}{3}$. Contrôle : $\dfrac{120}{90} = \dfrac{4}{3}$. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

Astuce — un contrôle rapide démasque beaucoup d'erreurs : un ordre de grandeur (2 millièmes de 45 000, c'est 90), ou le calcul du numérateur et du dénominateur ($\dfrac{120}{90}$ ne peut pas valoir 4).

Exercice 2 – Comparer de très grands nombres *(4 pts)*

a) $2^{30} = 2^{10}\times 2^{10}\times 2^{10}$ ($10+10+10 = 30$ facteurs égaux à 2), soit $1\,024\times 1\,024\times 1\,024$. Et $10^9 = 10^3\times 10^3\times 10^3 = 1\,000\times 1\,000\times 1\,000$. Chacun des trois facteurs de 2^{30} est plus grand que celui de 10^9, donc $2^{30} > 10^9$. (1 pt) (1)

b) $\sqrt{10^8} = 10^4$, car 10^4 est positif et $\left(10^4\right)^2 = 10^4\times 10^4 = 10^8$; donc $\sqrt{10^8} = 10\,000$. $2^{13} = 2^{10}\times 2^3 = 1\,024\times 8 = 8\,192$. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

c) $5\times 10^3 = 5\,000$ et $9{,}9\times 10^3 = 9\,900$; avec $2^{13} = 8\,192$ et $\sqrt{10^8} = 10\,000$: $5\times 10^3 < 2^{13} < 9{,}9\times 10^3 < \sqrt{10^8}$. (1 pt) (1)

d) $8 = 2^3$, donc $8^4 = \left(2^3\right)^4 = 2^{12}$ (4 fois 3 facteurs) ; $4 = 2^2$, donc $4^5 = \left(2^2\right)^5 = 2^{10}$. Alors $\dfrac{2^{12}\times 2^{10}}{2^{15}} = \dfrac{2^{22}}{2^{15}} = 2^7 = 128$. (0,5 pt pour 2^{12} et 2^{10} + 0,5 pt pour $2^7 = 128$) (1)

Méthode — avec des bases différentes, on cherche une base commune : $8 = 2^3$ et $4 = 2^2$; ensuite on compte les facteurs, $\left(2^3\right)^4$ en contient $4\times 3 = 12$.

Exercice 3 – Qui a raison ? *(3 pts)*

a) $2^2 - 1 = 3$; $2^3 - 1 = 7$; $2^5 - 1 = 31$; $2^7 - 1 = 127$. 3, 7 et 31 font partie des nombres premiers inférieurs à 100. Pour 127 : il n'est divisible ni par 2, ni par 3 ($1 + 2 + 7 = 10$), ni par 5, ni par 7 ($127 = 7 \times 18 + 1$), ni par 11 ($127 = 11 \times 11 + 6$) ; $13^2 = 169$ dépasse 127, on s'arrête : 127 est premier. (0,5 pt pour les calculs + 0,5 pt pour le test de 127) (1)

b) $2^{11} = 2^{10} \times 2 = 2\,048$, donc $2^{11} - 1 = 2\,047$. On essaie les nombres premiers dans l'ordre : 2, 3 ($2 + 0 + 4 + 7 = 13$), 5, 7, 11, 13, 17 et 19 ne divisent pas 2 047, mais $2\,047 \div 23 = 89$, donc $2\,047 = 23 \times 89$. 11 est premier mais $2^{11} - 1$ ne l'est pas : ce contre-exemple montre que Léa a tort. (0,5 pt pour 2 047 + 0,5 pt pour 23×89 et la conclusion) (1)

c) $2^4 - 1 = 15 = 3 \times 5$; $2^6 - 1 = 63 = 3^2 \times 7$; $2^9 - 1 = 511 = 7 \times 73$ (73 est premier). Aucun des trois n'est premier : les exemples vont dans le sens de Hugo, mais ils ne prouvent rien pour tous les nombres n ; des exemples ne suffisent jamais à prouver une affirmation générale (elle est pourtant vraie, mais sa démonstration dépasse le collège). (0,5 pt pour les décompositions + 0,5 pt pour la réponse sur la preuve) (1)

Piège — des exemples qui marchent ne prouvent pas une affirmation générale ; en revanche, un seul contre-exemple, comme $2^{11} - 1 = 23 \times 89$, suffit à la rendre fausse.

Exercice 4 – Enquête — Diviseurs et carrés parfaits *(4 pts)*

a) $200 = 2^3 \times 5^2$. Un diviseur contient au plus trois facteurs 2 et au plus deux facteurs 5 : on croise 1, 2 , 4, 8 avec 1, 5, 25. Diviseurs : 1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 8 ; 10 ; 20 ; 25 ; 40 ; 50 ; 100 ; 200, soit $4 \times 3 = 12$ diviseurs. (0,5 pt pour la décomposition + 0,5 pt pour la liste complète) (1)

b) Un diviseur de $2^4 \times 3^2$ s'écrit avec une puissance de 2 parmi 1, 2, 4, 8, 16 (5 choix) et une puissance de 3 parmi 1, 3, 9 (3 choix) : il y a $5 \times 3 = 15$ diviseurs. (0,5 pt pour 5×3 + 0,5 pt pour la justification des choix) (1)

c) Chaque produit $d \times e$ égal au nombre donne deux diviseurs ($8 \times 25 = 200$ par exemple), donc les diviseurs vont par paires, ce qui en fait un nombre pair… sauf si une paire est formée de deux diviseurs égaux, $d \times d$: le nombre est alors d^2, un carré parfait, et d est sa racine carrée. Un nombre impair de diviseurs oblige donc à avoir une telle paire : le nombre est un carré parfait. Exemples : 200 a 12 diviseurs (six paires) et n'est pas un carré parfait ($14^2 = 196 < 200 < 225 = 15^2$) ; $2^4 \times 3^2 = 144 = 12^2$ a 15 diviseurs, et 12 est seul dans sa paire ($12 \times 12 = 144$). (1 pt ; 0,5 pt pour une simple vérification sur les exemples) (1)

d) D'après la question précédente, ce nombre doit être un carré parfait. $36 = 2^2 \times 3^2$ convient : $3 \times 3 = 9$ diviseurs, à savoir 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 9 ; 12 ; 18 ; 36. Autre réponse juste : $100 = 2^2 \times 5^2$, qui a aussi $3 \times 3 = 9$ diviseurs ; ce sont les deux seules. (1 pt : 0,5 pour le nombre, 0,5 pour la justification) (1)

Astuce — les diviseurs d'un nombre vont par paires ($8 \times 25 = 200$) ; seul un carré parfait possède un diviseur « seul dans sa paire » : sa racine carrée, comme 12 pour 144.

Exercice 5 – Problème — Des carrés de plus en plus petits *(5 pts)*

a) Le côté de la plaque vaut $\sqrt{400} = 20$ cm, car $20^2 = 400$. Couper au milieu des côtés divise le côté par 2 : après la première étape, chaque carré a pour côté 10 cm (contrôle : $4 \times 10^2 = 400$ cm²). (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

b) Chaque étape multiplie le nombre de carrés par 4 : $4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64$ carrés, et $4^3 = \left(2^2\right)^3 = 2^6$. Le côté est divisé par 2 à chaque étape : $20 \div 2^3 = 20 \div 8 = 2{,}5$ cm. Contrôle : $64 \times 2{,}5^2 = 64 \times 6{,}25 = 400$ cm². (0,5 pt pour $4^3 = 2^6 = 64$ + 0,5 pt pour 2,5 cm) (1)

c) Après n étapes, il y a 4^n carrés, et le côté d'un carré mesure $\dfrac{20}{2^n}$ cm (soit $20 \div 2^n$). (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

d) $1\ \mu\text{m} = 10^{-6}$ m $= 10^{-4}$ cm. On veut $\dfrac{20}{2^n} < 10^{-4}$, c'est-à-dire $2^n > 20 \div 10^{-4} = 20 \times 10^4 = 200\,000$. Or $2^{17} = 131\,072$ ne dépasse pas 200 000, alors que $2^{18} = 262\,144$ le dépasse : il faut 18 étapes (après 17 étapes, le côté mesure encore environ 1,5 µm). (0,5 pt pour la conversion + 0,5 pt pour 18 étapes justifiées) (1)

e) Il y a alors 4^{18} carrés : $4^{18} = 68\,719\,476\,736 \approx 6{,}87 \times 10^{10}$ (la calculatrice affiche 6.871947674E10). (0,5 pt pour 4^{18} + 0,5 pt pour $6{,}87 \times 10^{10}$) (1)

Piège — on compare des longueurs dans la même unité : 1 µm vaut 10^{-4} cm ; et c'est le côté qui est divisé par 2 à chaque étape, pendant que le nombre de carrés est multiplié par 4.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).