Corrigé et barème – puissances, racine carrée et nombres premiers — niveau ★★

Durée : 55 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 4e

Exercice 1 – Vrai ou faux ? *(4 pts)*

a) Faux. $2^3 \times 2^4 = 2^7$: $3 + 4 = 7$ facteurs égaux à 2, soit 128. Or $4^7 = 16\,384$. On garde la base, on ne la multiplie pas. (1 pt) (1)

b) Faux. $0{,}04^2 = 0{,}0016$, et non 0,16. Comme $0{,}4^2 = 0{,}16$ et 0,4 est positif, $\sqrt{0{,}16} = 0{,}4$. (1 pt) (1)

c) Faux. 221 n'est divisible ni par 2, ni par 3 ($2 + 2 + 1 = 5$), ni par 5, ni par 7 ($221 = 7 \times 31 + 4$), ni par 11 ($221 = 11 \times 20 + 1$). Mais $13^2 = 169$ ne dépasse pas 221 : on essaie 13, et $221 = 13 \times 17$. 221 a donc au moins quatre diviseurs (1, 13, 17, 221). (1 pt ; 0 si l'on conclut « premier » après avoir testé jusqu'à 11) (1)

d) Vrai. $2^5 \times 5^5$ contient cinq facteurs 2 et cinq facteurs 5 ; on les regroupe par paires : $(2 \times 5) \times (2 \times 5) \times (2 \times 5) \times (2 \times 5) \times (2 \times 5) = 10^5$. Contrôle : $32 \times 3\,125 = 100\,000$. (1 pt) (1)

Astuce — pour montrer qu'une affirmation est fausse, un seul calcul qui la contredit suffit ; pour montrer qu'elle est vraie, il faut une explication qui marche à coup sûr, comme le regroupement par paires $2 \times 5 = 10$.

Exercice 2 – Notation scientifique et préfixes *(4 pts)*

a) $0{,}000\,407 = 4{,}07 \times 10^{-4}$ (la virgule se décale de 4 rangs vers la droite, nombre plus petit que 1). $36{,}2 = 3{,}62 \times 10^1$, donc $36{,}2 \times 10^5 = 3{,}62 \times 10^1 \times 10^5 = 3{,}62 \times 10^6$. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

b) On regroupe : $F = \dfrac{1{,}5 \times 8}{3} \times \dfrac{10^6 \times 10^{-2}}{10^{-4}}$. D'une part $1{,}5 \times 8 = 12$ et $12 \div 3 = 4$; d'autre part $6 + (-2) - (-4) = 8$. Donc $F = 4 \times 10^8$. (0,5 pt pour 4 + 0,5 pt pour l'exposant 8) (1)

c) 3,6 Go $= 3{,}6 \times 10^9$ octets $= 3{,}6 \times 10^3 \times 10^6$ octets $= 3\,600$ Mo. $4\,500$ µs $= 4\,500 \times 10^{-6}$ s $= 4{,}5 \times 10^3 \times 10^{-6}$ s $= 4{,}5 \times 10^{-3}$ s (soit 0,004 5 s). (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

d) $0{,}004 \times 10^{-2} = 4 \times 10^{-3} \times 10^{-2} = 4 \times 10^{-5}$. Les deux nombres ont maintenant le même exposant -5 et $3{,}2 < 4$, donc $3{,}2 \times 10^{-5} < 0{,}004 \times 10^{-2}$. (0,5 pt pour la mise en notation scientifique + 0,5 pt pour la conclusion) (1)

Piège — avant de comparer deux nombres, on les écrit tous les deux en notation scientifique : $0{,}004 \times 10^{-2}$ semble avoir l'exposant -2, mais il vaut 4×10^{-5}.

Exercice 3 – Encadrer et comparer des racines carrées *(4 pts)*

a) $81 < 87 < 100$, c'est-à-dire $9^2 < 87 < 10^2$, donc $9 < \sqrt{87} < 10$. (1 pt) (1)

b) $9{,}3^2 = 86{,}49$ et $9{,}4^2 = 88{,}36$. Comme $86{,}49 < 87 < 88{,}36$, on a $9{,}3 < \sqrt{87} < 9{,}4$. (0,5 pt pour les carrés + 0,5 pt pour l'encadrement) (1)

c) On compare les carrés : $7^2 = 49$ et $7{,}1^2 = 50{,}41$, alors que $\left(\sqrt{48}\right)^2 = 48$ et $\left(\sqrt{50}\right)^2 = 50$. Comme $48 < 49 < 50 < 50{,}41$ et que ces nombres positifs sont rangés comme leurs carrés : $\sqrt{48} < 7 < \sqrt{50} < 7{,}1$. (0,5 pt pour $7{,}1^2$ + 0,5 pt pour le rangement) (1)

d) Sous la racine d'abord : $\sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$; puis $\sqrt{3^2} = 3$ et $\sqrt{4^2} = 4$. $G = 5 - 3 - 4 = -2$. Comme G n'est pas nul, $\sqrt{3^2 + 4^2}$ n'est pas égal à $3 + 4 = 7$: la racine carrée d'une somme n'est pas la somme des racines carrées. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

Méthode — pour comparer $\sqrt{a}$ et un nombre positif b, on compare a et b^2 : des nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés.

Exercice 4 – Décomposer pour calculer *(4 pts)*

a) $980 = 2 \times 490 = 2 \times 2 \times 245 = 2 \times 2 \times 5 \times 49$, donc $980 = 2^2 \times 5 \times 7^2$. $1\,176 = 2 \times 588 = 2 \times 2 \times 294 = 2 \times 2 \times 2 \times 147 = 2^3 \times 3 \times 49$, donc $1\,176 = 2^3 \times 3 \times 7^2$. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

b) $\dfrac{980}{1\,176} = \dfrac{2^2 \times 5 \times 7^2}{2^3 \times 3 \times 7^2} = \dfrac{5}{2 \times 3} = \dfrac{5}{6}$: on a supprimé les facteurs communs $2^2 \times 7^2 = 196$ (deux facteurs 2 seulement, car il n'y en a que deux en haut). (1 pt ; 0,5 pt pour une simplification incomplète) (1)

c) $28 = 2^2 \times 7$: ses facteurs se trouvent dans $1\,176 = 2^3 \times 3 \times 7^2$, avec des exposants assez grands, donc 1 176 est divisible par 28 ($1\,176 = 28 \times 42$). $16 = 2^4$: il faudrait quatre facteurs 2, or 1 176 n'en contient que trois ; 1 176 n'est pas divisible par 16. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

d) On prend tous les facteurs premiers, chacun avec son plus grand exposant : $2^3 \times 3 \times 5 \times 7^2 = 8 \times 3 \times 5 \times 49 = 5\,880$. Contrôle : $5\,880 = 980 \times 6 = 1\,176 \times 5$. (1 pt) (1)

Méthode — un nombre en divise un autre quand chacun de ses facteurs premiers apparaît dans la décomposition de l'autre avec un exposant au moins aussi grand : $16 = 2^4$ ne divise pas $2^3 \times 3 \times 7^2$.

Exercice 5 – Problème — Le capteur photo *(4 pts)*

a) 16 millions $= 16\,000\,000 = 1{,}6 \times 10^7$. (1 pt) (1)

b) Si n est le nombre de pixels d'une ligne, alors $n \times n = n^2 = 16\,000\,000$, donc $n = \sqrt{16\,000\,000}$. Or $4\,000^2 = 4^2 \times 1\,000^2 = 16 \times 1\,000\,000 = 16\,000\,000$: il y a 4 000 pixels sur une ligne. (1 pt) (1)

c) $24 \div 4\,000 = 0{,}006$ mm. Puis $0{,}006 \text{ mm} = 6 \times 10^{-3} \times 10^{-3}$ m $= 6 \times 10^{-6}$ m $= 6$ µm. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

d) $3 \times 1{,}6 \times 10^7 = 4{,}8 \times 10^7$ octets. Comme 1 Mo $= 10^6$ octets : $4{,}8 \times 10^7 = 48 \times 10^6$ octets $= 48$ Mo. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

Astuce — « autant de lignes que de colonnes » cache une racine carrée : $\sqrt{16\,000\,000} = 4\,000$, parce que $4^2 = 16$ et $1\,000^2 = 1\,000\,000$.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).