Corrigé et barème – puissances, racine carrée et nombres premiers — niveau ★

Durée : 55 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 4e

Exercice 1 – Calculer avec des puissances *(4 pts)*

a) $4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$; $(-2)^5 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = -32$ (base négative, exposant impair : résultat négatif, et $2^5 = 32$) ; $9^0 = 1$. (0,5 pt pour 4^3 + 0,5 pt pour les deux autres) (1)

b) $6^4 \times 6^3 = 6^7$ ($4 + 3 = 7$ facteurs égaux à 6) ; $\dfrac{11^8}{11^5} = 11^3$ (on simplifie 5 facteurs, il en reste $8 - 5 = 3$) ; $10^6 \times 10^{-8} = 10^{-2}$ (car $6 + (-8) = -2$). (0,5 pt pour les deux premières + 0,5 pt pour la dernière) (1)

c) La puissance d'abord : $B = 50 - 3 \times 16$, puis le produit : $B = 50 - 48$, enfin $B = 2$. (1 pt ; 0 si l'on calcule 3×2 ou $50 - 3$ en premier) (1)

d) $64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^6$ (on accepte aussi 4^3 ou 8^2) ; $125 = 5 \times 5 \times 5 = 5^3$. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

Erreur fréquente — dans 3×2^4, la puissance passe avant la multiplication : on ne calcule pas 6^4. Et 2^4 vaut 16, pas 8 : l'exposant compte les facteurs, il ne multiplie pas.

Exercice 2 – Puissances de 10 et notation scientifique *(4 pts)*

a) $10^{-4} = 0{,}000\,1$ (4 chiffres après la virgule, le dernier étant le 1) ; $2{,}9 \times 10^3 = 2\,900$ (virgule décalée de 3 rangs vers la droite) ; $57 \times 10^{-2} = 0{,}57$ (virgule décalée de 2 rangs vers la gauche). (0,5 pt pour 10^{-4} + 0,5 pt pour les deux autres) (1)

b) $48\,500 = 4{,}85 \times 10^4$: la virgule se place après le 4, elle s'est décalée de 4 rangs, et le nombre est grand (exposant positif). $0{,}006\,2 = 6{,}2 \times 10^{-3}$: la virgule se place après le 6, décalage de 3 rangs, et le nombre est plus petit que 1 (exposant négatif). (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

c) 7 km $= 7 \times 10^3$ m (kilo $= 10^3$), déjà en notation scientifique. 25 µm $= 25 \times 10^{-6}$ m $= 2{,}5 \times 10^1 \times 10^{-6}$ m $= 2{,}5 \times 10^{-5}$ m (micro $= 10^{-6}$). (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

d) Les trois nombres sont en notation scientifique : on compare d'abord les exposants. $-3 < -2 < -1$, donc $8 \times 10^{-3} < 5 \times 10^{-2} < 1{,}2 \times 10^{-1}$ (en effet $0{,}008 < 0{,}05 < 0{,}12$). (1 pt) (1)

Piège — avec des exposants négatifs, le plus grand exposant est celui qui est le plus proche de 0 : 8×10^{-3} est plus petit que 5×10^{-2}, même si $8 > 5$.

Exercice 3 – Racines carrées *(4 pts)*

a) $\sqrt{64} = 8$ car $8^2 = 64$; $\sqrt{121} = 11$ car $11^2 = 121$; $\sqrt{0{,}09} = 0{,}3$ car $0{,}3^2 = 0{,}09$ (et 8, 11, 0,3 sont positifs). (0,5 pt pour les deux premières + 0,5 pt pour $\sqrt{0{,}09}$) (1)

b) $\left(\sqrt{7}\right)^2 = 7$: c'est la définition de la racine carrée, inutile de calculer $\sqrt{7}$. $(-6)^2 = 36$, donc $\sqrt{(-6)^2} = \sqrt{36} = 6$ (une racine carrée est positive, ce n'est pas -6). (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

c) $36 < 42 < 49$, c'est-à-dire $6^2 < 42 < 7^2$, donc $6 < \sqrt{42} < 7$. (1 pt) (1)

d) $C = 3 \times \sqrt{49} - 2^3 = 3 \times 7 - 8 = 21 - 8 = 13$. (1 pt : 0,5 pour $\sqrt{49} = 7$ et $2^3 = 8$, 0,5 pour le résultat) (1)

Méthode — pour encadrer $\sqrt{a}$, on place a entre deux carrés parfaits consécutifs de la table ; leurs racines carrées encadrent $\sqrt{a}$.

Exercice 4 – Nombres premiers et décomposition *(4 pts)*

a) 2 est premier (seuls diviseurs : 1 et 2) ; 31 est premier (il n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5, et $7^2 = 49$ dépasse 31). 1 n'est pas premier (un seul diviseur) ; $21 = 3 \times 7$ et $49 = 7 \times 7$ ne sont pas premiers. (1 pt ; 0,5 pt retiré par erreur) (1)

b) 157 est impair ; $1 + 5 + 7 = 13$ n'est pas dans la table de 3 ; il ne se termine ni par 0 ni par 5 ; $157 = 7 \times 22 + 3$ et $157 = 11 \times 14 + 3$. Le nombre premier suivant est 13, et $13^2 = 169$ dépasse 157 : on s'arrête. 157 est premier. (1 pt ; 0,5 pt si l'on oublie de tester 7 ou 11) (1)

c) $168 = 2 \times 84 = 2 \times 2 \times 42 = 2 \times 2 \times 2 \times 21$, donc $168 = 2^3 \times 3 \times 7$; $280 = 2 \times 140 = 2 \times 2 \times 70 = 2 \times 2 \times 2 \times 35$, donc $280 = 2^3 \times 5 \times 7$. Vérification : $8 \times 3 \times 7 = 168$ et $8 \times 5 \times 7 = 280$. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

d) $\dfrac{168}{280} = \dfrac{2^3 \times 3 \times 7}{2^3 \times 5 \times 7} = \dfrac{3}{5}$: on a supprimé les facteurs communs $2^3 \times 7 = 56$. Il ne reste aucun facteur commun, la fraction est irréductible. (1 pt) (1)

Piège — 1 n'est pas premier, et un nombre impair ne l'est pas forcément : 21 et 49 « ont l'air » premiers, mais $21 = 3 \times 7$ et $49 = 7 \times 7$.

Exercice 5 – Problème — Les parcelles *(4 pts)*

a) Le côté c vérifie $c^2 = 900$ et c est positif : $c = \sqrt{900} = 30$ m, car $30^2 = 900$. (1 pt) (1)

b) $30 = 2 \times 3 \times 5$. Ses diviseurs sont 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 6 ; 10 ; 15 ; 30. Côtés possibles entre 2 m et 15 m : 2 m, 3 m, 5 m, 6 m, 10 m et 15 m. (0,5 pt pour la décomposition + 0,5 pt pour la liste) (1)

c) $30 \div 6 = 5$ parcelles sur chaque côté, donc $5 \times 5 = 5^2 = 25$ parcelles. Contrôle : une parcelle a une aire de $6^2 = 36$ m² et $25 \times 36 = 900$ m². (0,5 pt + 0,5 pt pour 5^2) (1)

d) Son aire est $4 \times 900 = 3\,600$ m², donc son côté vaut $\sqrt{3\,600} = 60$ m, car $60^2 = 3\,600$. Le côté est multiplié par $\sqrt{4} = 2$, et non par 4. (1 pt) (1)

Erreur fréquente — une aire 4 fois plus grande ne donne pas un côté 4 fois plus grand : le côté est multiplié par $\sqrt{4} = 2$ (avec un côté de 120 m, l'aire serait 16 fois plus grande).

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).