

Corrigé et barème – Proportionnalité, vitesse et notion de fonction — niveau ★★★

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 4^e

Exercice 1 – Automatismes justifiés

(3 pts)

- a) $f(x) = ax$ avec $6a = -9$, donc $a = -\frac{9}{6} = -1,5$. $f(-10) = -1,5 \times (-10) = 15$. Antécédent de 21 : $-1,5x = 21$, $x = \frac{21}{-1,5} = -14$. (1 pt : 0,5 pt pour $f(-10)$, 0,5 pt pour l'antécédent) (1)
- b) Hausse de 20 % : on multiplie par 1,2. Prix initial : $57,6 \div 1,2 = \frac{576}{12} = 48$ €. Vérification : $48 \times 1,2 = 57,6$. (1 pt) (1)
- c) $54 \text{ km/h} = \frac{54\,000 \text{ m}}{3\,600 \text{ s}} = 15 \text{ m/s}$. En 12 s : $15 \times 12 = 180 \text{ m}$. (1 pt : 0,5 pt par réponse) (1)

Astuce — pour passer des km/h aux m/s, on divise par 3,6 ; sans calculatrice, $54 \div 3,6 = 540 \div 36 = 15$ se fait de tête.

Exercice 2 – Calculs en fractions

(4 pts)

- a) $\frac{2}{3} \times \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{6}{12} = -\frac{1}{2}$; $f\left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{2}{4} - \frac{5}{4} = -\frac{7}{4}$. (1 pt : 0,5 pt pour le produit, 0,5 pt pour la différence) (1)
- b) $\frac{2}{3} \times \frac{9}{8} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$; $f\left(\frac{9}{8}\right) = \frac{3}{4} - \frac{5}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$. (1 pt) (1)
- c) $\frac{2}{3}x - \frac{5}{4} = \frac{1}{6}$; $\frac{2}{3}x = \frac{2}{12} + \frac{15}{12} = \frac{17}{12}$; $x = \frac{17}{12} \times \frac{3}{2} = \frac{51}{24} = \frac{17}{8}$. Vérification : $\frac{2}{3} \times \frac{17}{8} = \frac{17}{12}$ et $\frac{17}{12} - \frac{15}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$. (1 pt : 0,5 pt pour l'équation, 0,5 pt pour la solution) (1)
- d) Non : $f(0) = -\frac{5}{4} \neq 0$, alors qu'une situation de proportionnalité associe 0 à 0. Autre justification : f n'est pas de la forme $x \mapsto ax$, elle n'est pas linéaire. (1 pt) (1)

Erreur fréquente — pour isoler x dans $\frac{2}{3}x = \frac{17}{12}$, on multiplie par l'inverse $\frac{3}{2}$; multiplier par $\frac{2}{3}$ une seconde fois est l'erreur classique.

Exercice 3 – Recherche — des minutes entières

(5 pts)

- a) Durée en heures : $\frac{12}{v}$; en minutes : $\frac{12}{v} \times 60 = \frac{720}{v}$. $t(16) = \frac{720}{16} = 45$ min. (1 pt : 0,5 pt pour la formule, 0,5 pt pour $t(16)$) (1,25)
- b) $t(10) = 72$ et $t(20) = 36$: quand la vitesse double, la durée est divisée par 2 au lieu d'être multipliée par 2. La durée n'est pas proportionnelle à la vitesse. (1 pt) (1,25)
- c) $\frac{720}{v} = 48$ donne $v = \frac{720}{48} = 15$. À 15 km/h, le trajet dure 48 minutes. (1 pt) (1,25)
- d) $t(v)$ est entier exactement quand v est un diviseur de 720. Or $720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$: un diviseur de 720 n'a pour facteurs premiers que 2 (au plus 4 fois), 3 (au plus 2 fois) et 5 (au plus une fois). Entre 10 et 40, les entiers dont les seuls facteurs premiers sont 2, 3 ou 5 sont : 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 27, 30, 32, 36, 40. On élimine $25 = 5^2$, $27 = 3^3$ et $32 = 2^5$. Il reste 10 vitesses : 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 30, 36, 40 km/h (durées 72, 60, 48, 45, 40, 36, 30, 24, 20, 18 min). Tout autre entier de cet intervalle a un facteur premier 7, 11, 13, ... qui ne divise pas 720. (2 pts : 1 pt pour la liste complète, 1 pt pour la justification par la décomposition) (1,25)

Méthode — pour être sûr de n'oublier aucune solution, on s'appuie sur la décomposition en facteurs premiers plutôt que sur des essais au hasard.

Exercice 4 – Problème — la maquette

(4 pts)

- a) $15 \times 400 = 6\,000$ cm = 60 m ; $7,5 \times 400 = 3\,000$ cm = 30 m. (1 pt : 0,5 pt par dimension) (1)
- b) Façade : $60 \times 30 = 1\,800$ m². Vitres : $\frac{40}{100} \times 1\,800 = 720$ m². (1 pt) (1)
- c) $C(s) = 2,5s + 150$. $C(720) = 2,5 \times 720 + 150 = 1\,800 + 150 = 1\,950$ €. C n'est pas linéaire car $C(0) = 150 \neq 0$. Budget : $2,5s + 150 = 1\,400$, $2,5s = 1\,250$, $s = 500$ m². (1 pt : 0,5 pt pour $C(720)$ et la linéarité, 0,5 pt pour l'antécédent) (1)
- d) Première façon : façade sur la maquette $15 \times 7,5 = 112,5$ cm², vitres $0,4 \times 112,5 = 45$ cm². Seconde façon : les aires sont divisées par $400^2 = 160\,000$; 720 m² = $7\,200\,000$ cm² et $7\,200\,000 \div 160\,000 = 45$ cm². (1 pt : 0,5 pt par méthode) (1)

Piège — une échelle $\frac{1}{400}$ divise les longueurs par 400, mais les aires par $400 \times 400 = 160\,000$; diviser 720 m² par 400 seulement donne un résultat faux.

Exercice 5 – Défi — ce que cache une fonction linéaire

(4 pts)

- a) $f(x + y) = a(x + y) = ax + ay = f(x) + f(y)$ par distributivité. (1 pt) (1)
- b) $f(kx) = a \times (kx) = k \times (ax) = k \times f(x)$, car on peut changer l'ordre des facteurs d'un produit. (1 pt) (1)
- c) Si g était linéaire, on aurait, d'après la première question, $g(10) = g(4 + 6) = g(4) + g(6) = 10 + 15 = 25$. Or $g(10) = 24 \neq 25$: g ne peut pas être linéaire. (1 pt) (1)
- d) Un prix x devient $1,6x$, puis $1,6x \times \left(1 - \frac{p}{100}\right)$. On veut $1,6 \times \left(1 - \frac{p}{100}\right) = 1$, soit $1 - \frac{p}{100} = \frac{1}{1,6} = \frac{10}{16} = 0,625$, donc $\frac{p}{100} = 0,375$ et $p = 37,5$. La réponse ne dépend pas de x car les deux évolutions sont des fonctions linéaires : leur enchaînement multiplie tout prix par le même nombre, ici $1,6 \times 0,625 = 1$. (1 pt : 0,5 pt pour p , 0,5 pt pour l'explication) (1)

Astuce — la propriété $f(x + y) = f(x) + f(y)$ est une signature des fonctions linéaires : il suffit d'un seul cas où elle échoue pour prouver qu'une fonction n'est pas linéaire.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).