

Devoir surveillé – Fractions, relatifs, puissances et nombres premiers — niveau ★★★

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 4^e

Nom : _____

Date : _____

Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Calculs longs

(4 pts)

Sans calculatrice, calcule en détaillant. Donne chaque résultat sous forme d'un entier, d'une fraction irréductible ou d'une puissance de 10.

a)
$$A = \frac{(-2)^3 \times \frac{3}{4} - \frac{1}{3}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{6}}$$

b)
$$B = \frac{5 \times 10^{-4} \times 12 \times 10^7}{15 \times 10^{-3} \times 4 \times 10^2}$$

c)
$$C = 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{3}}}$$

d)
$$D = \left(-\frac{2}{3}\right)^3 \div \left(-\frac{4}{9}\right)^2$$

Exercice 2 – Justifier sans calculer

(4 pts)

Réponds par un raisonnement : le calcul complet des nombres n'est pas demandé.

- a) Quel est le signe de $P = (-3)^{15} \times (-7)^8 \times \left(-\frac{2}{5}\right)^{21}$?
- b) Quel est le signe du produit $Q = (-1) \times 2 \times (-3) \times 4 \times (-5) \times \dots \times (-99) \times 100$, dans lequel chaque entier de 1 à 100 apparaît une fois, les impairs étant précédés d'un signe « moins » ?
- c) Sans calculer ces deux nombres, compare 2^{30} et 10^9 .
- d) Justifie, à l'aide d'une décomposition en facteurs premiers, que 3 969 est le carré d'un entier, puis donne $\sqrt{3\,969}$.

Exercice 3 – Enquête — n'en oublier aucun

(5 pts)

- a) Décompose 72 en produit de facteurs premiers, puis dresse la liste de tous ses diviseurs positifs. Explique pourquoi tu n'en as oublié aucun.
- b) Trouve tous les couples d'entiers relatifs $(a; b)$ tels que $a \times b = -72$ et $a + b = -1$. Justifie qu'il n'y en a pas d'autres.
- c) Pour combien d'entiers relatifs n le quotient $\frac{72}{n}$ est-il un entier relatif ?
- d) Parmi les diviseurs positifs de 72, lesquels sont des carrés parfaits ? Donne leurs racines carrées.

Exercice 4 – Problème — les roues dentées*(4 pts)*

Dans une machine, une roue A de 40 dents entraîne une roue B de 56 dents. Au départ, une dent marquée de A touche une dent marquée de B. La roue A fait 1 400 tours par minute, et la machine tourne sans arrêt pendant une année de 365 jours.

- a) Quand A fait un tour, quelle fraction de tour B fait-elle ? Déduis-en le nombre de tours par minute de B.
- b) Au bout de combien de tours de A les deux dents marquées se retrouveront-elles en contact pour la première fois ? Justifie.
- c) Combien de fois les deux dents marquées se touchent-elles pendant l'année, sans compter l'instant de départ ? Donne le résultat en écriture scientifique, puis son ordre de grandeur.

Exercice 5 – Défi — sommes de puissances*(3 pts)*

On étudie des sommes de trois puissances consécutives d'un même nombre.

- a) Montre que $N = 2^{12} + 2^{11} + 2^{10}$ est égal à 7×2^{10} . Déduis-en la décomposition de N en facteurs premiers et le nombre de ses diviseurs positifs.
- b) Généralise : montre que, pour tout entier $n \geq 1$, le nombre $2^{n+2} + 2^{n+1} + 2^n$ est un multiple de 7.
- c) Et avec une base négative ? Montre que $(-2)^9 + (-2)^{10} + (-2)^{11}$ est un multiple de 3, puis donne son signe et sa valeur.

Bon courage !

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).