

Corrigé et barème – Fractions, relatifs, puissances et nombres premiers — niveau ★★★

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 4^e

Exercice 1 – Calculs longs

(4 pts)

- a) Numérateur : $-8 \times \frac{3}{4} = -6$, puis $-6 - \frac{1}{3} = -\frac{18}{3} - \frac{1}{3} = -\frac{19}{3}$. Dénominateur : $\frac{1}{4} - \frac{5}{6} = \frac{3}{12} - \frac{10}{12} = -\frac{7}{12}$. Donc $A = -\frac{19}{3} \times \left(-\frac{12}{7}\right) = \frac{19 \times 12}{3 \times 7} = \frac{19 \times 4}{7} = \frac{76}{7}$. (1 pt : 0,5 pour le numérateur et le dénominateur, 0,5 pour le quotient) (1)
- b) On regroupe : $\frac{5 \times 12}{15 \times 4} = \frac{60}{60} = 1$ et $\frac{10^{-4} \times 10^7}{10^{-3} \times 10^2} = \frac{10^3}{10^{-1}} = 10^{3-(-1)} = 10^4$. Donc $B = 10^4$. (1 pt : 0,5 pour les nombres, 0,5 pour les puissances de 10) (1)
- c) On part de l'intérieur : $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$; $1 \div \frac{2}{3} = \frac{3}{2}$; $1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$; $1 \div \left(-\frac{1}{2}\right) = -2$; enfin $C = 1 - (-2) = 3$. (1 pt : 0,5 pour les étapes intermédiaires, 0,5 pour le résultat) (1)
- d) $\left(-\frac{2}{3}\right)^3 = -\frac{8}{27}$ (exposant impair) et $\left(-\frac{4}{9}\right)^2 = \frac{16}{81}$ (exposant pair). Donc $D = -\frac{8}{27} \times \frac{81}{16} = -\frac{8 \times 81}{27 \times 16} = -\frac{8 \times 3 \times 27}{27 \times 2 \times 8} = -\frac{3}{2}$. (1 pt : 0,5 pour les deux puissances, 0,5 pour le quotient simplifié) (1)

Méthode — dans une fraction étagée, on calcule de l'intérieur vers l'extérieur et l'on remplace « diviser par une fraction » par « multiplier par son inverse » ; simplifier avant de multiplier garde des nombres petits.

Exercice 2 – Justifier sans calculer

(4 pts)

- a) $(-3)^{15}$ est négatif (exposant impair), $(-7)^8$ est positif (exposant pair) et $\left(-\frac{2}{5}\right)^{21}$ est négatif (exposant impair). Le produit compte deux facteurs négatifs : P est positif. (1 pt : 0,5 pour le signe des trois facteurs, 0,5 pour la conclusion) (1)
- b) Les facteurs négatifs sont $-1, -3, -5, \dots, -99$: il y en a autant que d'entiers impairs entre 1 et 100, soit 50. Un nombre pair de facteurs négatifs donne un produit positif : Q est positif. (1 pt : 0,5 pour le compte des 50 facteurs négatifs, 0,5 pour la conclusion) (1)
- c) $2^{10} = 32 \times 32 = 1\,024 > 1\,000 = 10^3$. Or $2^{30} = 2^{10} \times 2^{10} \times 2^{10}$ et $10^9 = 10^3 \times 10^3 \times 10^3$: chacun des trois facteurs positifs de gauche dépasse celui de droite, donc $2^{30} > 10^9$. (1 pt : 0,5 pour la comparaison de 2^{10} et 10^3 , 0,5 pour le passage à 2^{30} et 10^9) (1)
- d) La somme des chiffres de 3 969 vaut 27, donc 3 969 est divisible par 9 : $3\,969 = 9 \times 441$, et $441 = 9 \times 49$. Ainsi $3\,969 = 3^4 \times 7^2 = (3^2 \times 7) \times (3^2 \times 7) = 63^2$, donc $\sqrt{3\,969} = 63$. (1 pt : 0,5 pour la décomposition, 0,5 pour la racine justifiée) (1)

Astuce — pour le signe d'un produit, seul compte le nombre de facteurs négatifs : pair, le produit est positif ; impair, il est négatif. Une puissance d'exposant pair est toujours positive.

Exercice 3 – Enquête — n’en oublier aucun**(5 pts)**

- a) $72 = 2 \times 36 = 2 \times 2 \times 18 = 2 \times 2 \times 2 \times 9 = 2^3 \times 3^2$. Un diviseur positif de 72 s’obtient en choisissant un nombre parmi 1, 2, 4, 8 (zéro à trois facteurs 2) et en le multipliant par un nombre parmi 1, 3, 9 (zéro à deux facteurs 3) : $4 \times 3 = 12$ choix, donc 12 diviseurs et pas un de plus. Liste : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72. (1,5 pt : 0,5 pour la décomposition, 0,5 pour la liste complète, 0,5 pour l’argument d’exhaustivité) (1,25)
- b) Le produit est négatif, donc a et b sont de signes contraires, et leurs distances à zéro forment un couple de diviseurs associés de 72 : 1 et 72, 2 et 36, 3 et 24, 4 et 18, 6 et 12, 8 et 9. Comme $a + b = -1$, ces deux distances diffèrent de 1, et la plus grande porte le signe « moins » : seul le couple 8 et 9 convient, avec $8 + (-9) = -1$. Solutions : (8 ; -9) et (-9 ; 8). (1,5 pt : 0,5 pour les signes contraires, 0,5 pour l’examen de tous les couples, 0,5 pour les deux solutions) (1,25)
- c) $\frac{72}{n}$ est un entier exactement quand n est un diviseur de 72 (avec $n \neq 0$). Les 12 diviseurs positifs conviennent, ainsi que leurs opposés (par exemple $\frac{72}{-8} = -9$) : il y a $12 + 12 = 24$ entiers n . (1 pt : 0,5 pour les diviseurs positifs, 0,5 pour les opposés) (1,25)
- d) Les carrés d’entiers compris entre 1 et 72 sont 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49 et 64. Parmi eux, seuls 1, 4, 9 et 36 figurent dans la liste des diviseurs (16, 25, 49 et 64 n’y sont pas). Racines : $\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$ et $\sqrt{36} = 6$. (1 pt : 0,5 pour les quatre carrés justifiés, 0,5 pour les racines) (1,25)

Méthode — pour être sûr d’avoir tous les diviseurs, on peut aussi les associer par paires dont le produit vaut le nombre, en testant les entiers dans l’ordre jusqu’à ce que les paires se rejoignent : pour 72, on s’arrête à 8×9 .

Exercice 4 – Problème — les roues dentées**(4 pts)**

- a) Quand A fait un tour, 40 dents passent au point de contact, soit 40 des 56 dents de B : B fait $\frac{40}{56} = \frac{5 \times 8}{7 \times 8} = \frac{5}{7}$ de tour. Vitesse de B : $1\,400 \times \frac{5}{7} = 200 \times 5 = 1\,000$ tours par minute. (1 pt : 0,5 pour $\frac{5}{7}$, 0,5 pour les 1 000 tours) (1,33333)
- b) Les dents marquées se retrouvent quand le nombre de dents passées au contact est à la fois un multiple de 40 (A a fait un nombre entier de tours) et de 56 (B aussi), le plus petit possible. $40 = 2^3 \times 5$ et $56 = 2^3 \times 7$; le plus petit multiple commun contient 2^3 , 5 et 7 : $2^3 \times 5 \times 7 = 280$. Donc $280 \div 40 = 7$ tours de A (pendant que B fait $280 \div 56 = 5$ tours). Le produit $40 \times 56 = 2\,240$ est aussi un multiple commun, mais pas le plus petit. (1,5 pt : 0,5 pour la traduction en multiple commun, 0,5 pour les décompositions, 0,5 pour les 7 tours) (1,33333)
- c) Un contact tous les 7 tours de A, soit $1\,400 \div 7 = 200$ contacts par minute (vérification avec B : $1\,000 \div 5 = 200$). Une année compte $60 \times 24 \times 365 = 1\,440 \times 365 = 525\,600$ minutes. Nombre de contacts : $200 \times 525\,600 = 105\,120\,000 = 1,0512 \times 10^8$; ordre de grandeur : 10^8 , soit une centaine de millions. (1,5 pt : 0,5 pour les 200 contacts par minute, 0,5 pour le nombre de minutes, 0,5 pour l’écriture scientifique et l’ordre de grandeur) (1,33333)

Piège — les dents marquées se retrouvent quand chaque roue a fait un nombre entier de tours : on cherche un multiple commun des nombres de dents, pas un diviseur commun, et le produit des deux nombres n’est pas forcément le plus petit.

Exercice 5 – Défi — sommes de puissances**(3 pts)**

- a) $2^{12} = 2^2 \times 2^{10} = 4 \times 2^{10}$ et $2^{11} = 2 \times 2^{10}$, donc $N = 4 \times 2^{10} + 2 \times 2^{10} + 1 \times 2^{10} = (4 + 2 + 1) \times 2^{10} = 7 \times 2^{10}$. Décomposition : $N = 2^{10} \times 7$. Ses diviseurs positifs sont $1, 2, 2^2, \dots, 2^{10}$ (onze nombres) et ces mêmes nombres multipliés par 7 (onze autres) : 22 diviseurs. (1 pt : 0,5 pour la factorisation, 0,5 pour la décomposition et les 22 diviseurs) (1)
- b) $2^{n+2} = 2^n \times 2 \times 2 = 4 \times 2^n$ et $2^{n+1} = 2 \times 2^n$, donc $2^{n+2} + 2^{n+1} + 2^n = (4 + 2 + 1) \times 2^n = 7 \times 2^n$: c'est un multiple de 7, puisque 2^n est un entier. (1 pt : 0,5 pour l'écriture des puissances à l'aide de 2^n , 0,5 pour la factorisation et la conclusion) (1)
- c) $(-2)^{10} = (-2) \times (-2)^9$ et $(-2)^{11} = (-2)^2 \times (-2)^9 = 4 \times (-2)^9$, donc la somme vaut $(1 - 2 + 4) \times (-2)^9 = 3 \times (-2)^9$: c'est un multiple de 3. L'exposant 9 est impair, donc $(-2)^9 = -512$: la somme est négative et vaut $3 \times (-512) = -1\,536$. (1 pt : 0,5 pour la factorisation par $(-2)^9$, 0,5 pour le signe et la valeur) (1)

Erreur fréquente — « $2^{12} + 2^{11} = 2^{23}$ » est faux : on ajoute les exposants pour un produit, jamais pour une somme. Face à une somme de puissances d'un même nombre, on met en facteur la plus petite.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).