

Corrigé et barème – Fractions, relatifs, puissances et nombres premiers — niveau ★★

Durée : 55 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 4^e

Exercice 1 – Calculs en cascade

(4 pts)

- a) Parenthèse : $\frac{4}{6} - \frac{5}{6} = -\frac{1}{6}$; puissance : $(-3)^2 = 9$; produit : $-\frac{1}{6} \times 9 = -\frac{9}{6} = -\frac{3}{2}$. (1 pt : 0,5 pour la parenthèse et le carré, 0,5 pour le résultat) (1)
- b) Numérateur : $(-2)^3 + 4^2 = -8 + 16 = 8$; dénominateur : $3 - 25 = -22$; quotient : $\frac{8}{-22} = -\frac{4}{11}$. (1 pt : 0,5 pour le numérateur et le dénominateur, 0,5 pour le résultat) (1)
- c) Parenthèse : $\frac{4}{8} - \frac{7}{8} = -\frac{3}{8}$; puis $\frac{3}{4} \times \left(-\frac{8}{3}\right) = -\frac{24}{12} = -2$. (1 pt : 0,5 pour la parenthèse, 0,5 pour la division) (1)
- d) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8}$ (trois facteurs négatifs) ; $\frac{5}{8} \div \frac{5}{2} = \frac{5}{8} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$; donc $-\frac{1}{8} - \frac{2}{8} = -\frac{3}{8}$. (1 pt : 0,5 pour la puissance et le quotient, 0,5 pour le résultat) (1)

Méthode — un trait de fraction joue le rôle de parenthèses : on calcule séparément le numérateur et le dénominateur avant de diviser, puis on place le signe devant la fraction.

Exercice 2 – Qui a raison ?

(4 pts)

- a) Léa a raison : $(-1)^{25} = -1$ (exposant impair) et $(-2)^4 = 16$ (exposant pair), donc le produit vaut $-1 \times 16 = -16$. (1 pt : 0,5 pour le signe de chaque puissance, 0,5 pour la conclusion) (1)
- b) Hugo a tort : $2^7 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 128$ et $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$, donc $2^7 > 5^3$, de peu. (1 pt : 0,5 pour les deux calculs, 0,5 pour la conclusion) (1)
- c) Inès a tort : $143 = 11 \times 13$. Il faut tester tous les nombres premiers dont le carré ne dépasse pas 143, c'est-à-dire 2, 3, 5, 7 et 11 (car $11^2 = 121 \leq 143 < 169 = 13^2$) ; le test par 11 réussit. (1 pt : 0,5 pour la décomposition, 0,5 pour l'explication de la méthode) (1)
- d) Malik a raison : $\frac{1}{4} = 0,25$, donc $\frac{1}{4} \times 10^{-2} = 0,25 \times 0,01 = 0,0025 = 2,5 \times 10^{-3}$. (1 pt : 0,5 pour le calcul, 0,5 pour l'écriture scientifique) (1)

Erreur fréquente — s'arrêter à 2, 3 et 5 ne prouve pas qu'un nombre est premier : 143, 221 ou 323 résistent à ces trois tests sans être premiers ($221 = 13 \times 17$ et $323 = 17 \times 19$).

Exercice 3 – Décompositions et carrés

(4 pts)

- a) $1\,188 \div 2 = 594$; $594 \div 2 = 297$; $297 \div 3 = 99$; $99 \div 3 = 33$; $33 \div 3 = 11$, qui est premier. Donc $1\,188 = 2^2 \times 3^3 \times 11$. (1 pt : 0,5 pour les divisions successives, 0,5 pour l'écriture finale) (1)
- b) $3\,528 \div 2 = 1\,764$; $1\,764 \div 2 = 882$; $882 \div 2 = 441$; $441 \div 3 = 147$; $147 \div 3 = 49 = 7 \times 7$. Donc $3\,528 = 2^3 \times 3^2 \times 7^2$. (1 pt : 0,5 pour les divisions successives, 0,5 pour l'écriture finale) (1)
- c) On regroupe les facteurs identiques en ajoutant les exposants : $2^2 \times 2^3 = 2^5$ et $3^3 \times 3^2 = 3^5$, d'où $1\,188 \times 3\,528 = 2^5 \times 3^5 \times 7^2 \times 11$. (1 pt : 0,5 pour les exposants de 2 et de 3, 0,5 pour l'écriture complète) (1)
- d) Dans le carré d'un entier, chaque facteur premier apparaît un nombre pair de fois (autant dans chacun des deux facteurs égaux). $3\,528 = 2^3 \times 3^2 \times 7^2$ n'est pas un carré (exposant 3 impair), donc $k = 1$ ne convient pas. Avec $k = 2$: $3\,528 \times 2 = 2^4 \times 3^2 \times 7^2 = (2^2 \times 3 \times 7)^2 = 84^2$. Donc $k = 2$ et $\sqrt{7\,056} = 84$. (1 pt : 0,5 pour $k = 2$ justifié, 0,5 pour la racine) (1)

Astuce — pour multiplier deux nombres déjà décomposés, on n'effectue pas le produit : on ajoute les exposants des mêmes facteurs premiers. Un nombre est un carré parfait quand tous ses exposants sont pairs.

Exercice 4 – Écriture scientifique et fractions

(4 pts)

- a) $A = \frac{6 \times 4}{8} \times \frac{10^5 \times 10^{-3}}{10^{-2}} = 3 \times \frac{10^2}{10^{-2}} = 3 \times 10^{2-(-2)} = 3 \times 10^4$. (1 pt : 0,5 pour les nombres, 0,5 pour les puissances de 10) (1)
- b) $\frac{3}{4} = 0,75 = 7,5 \times 10^{-1}$, donc $B = 7,5 \times 10^{-1} \times 10^{-5} = 7,5 \times 10^{-6}$. (1 pt : 0,5 pour 0,75, 0,5 pour l'exposant) (1)
- c) On écrit les deux termes avec la même puissance de 10 : $5 \times 10^{-3} = 50 \times 10^{-4}$, donc $C = 50 \times 10^{-4} - 4 \times 10^{-4} = 46 \times 10^{-4} = 4,6 \times 10^{-3}$. (1 pt : 0,5 pour la même puissance, 0,5 pour le résultat) (1)
- d) $A \times B = (3 \times 7,5) \times (10^4 \times 10^{-6}) = 22,5 \times 10^{-2} = 2,25 \times 10^{-1}$, soit 0,225. (1 pt : 0,5 pour le calcul, 0,5 pour les deux écritures) (1)

Piège — pour additionner ou soustraire deux nombres écrits avec des puissances de 10, il faut d'abord la même puissance de 10 : écrire « $5 - 4 = 1$ » devant l'une des deux puissances est une erreur classique.

Exercice 5 – Problème — les guirlandes

(4 pts)

- a) $12 = 2^2 \times 3$ et $45 = 3^2 \times 5$. (1 pt : 0,5 par décomposition) (1)
- b) Il faut le plus petit multiple commun de 12 et de 45. Il doit contenir 2^2 (pour 12) et $3^2 \times 5$ (pour 45) : c'est $2^2 \times 3^2 \times 5 = 180$ secondes, soit 3 minutes ($180 = 12 \times 15 = 45 \times 4$). Les guirlandes se rallument ensemble à 20 h 03 min. (1 pt : 0,5 pour 180 justifié, 0,5 pour l'heure) (1)
- c) $180 \text{ s} = \frac{180}{3\,600} \text{ h} = \frac{1}{20} \text{ h}$. En une heure, il y a donc 20 intervalles de 3 minutes, ce qui donne $20 + 1 = 21$ allumages communs (20 h, 20 h 03, ..., 21 h). (1 pt : 0,5 pour la fraction, 0,5 pour le compte de 21) (1)
- d) $20 = 2^2 \times 5$: ses facteurs figurent déjà dans $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$, donc $180 = 20 \times 9$ est aussi un multiple de 20. Les trois ne peuvent pas se retrouver avant la rouge et la bleue seules : elles se rallument ensemble pour la première fois à 20 h 03 min. (1 pt : 0,5 pour l'argument, 0,5 pour l'heure) (1)

Méthode — le plus petit multiple commun se lit sur les décompositions : chaque facteur premier présent, avec son plus grand exposant. Pour compter des événements sur une durée, on n'oublie pas celui du départ.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).