

Devoir surveillé – Repérage dans l'espace, patrons, aires et volumes — niveau ★★★

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 4^e

Nom : _____

Date : _____

Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Un pavé connu par un seul sommet

(4 pts)

$ABCDEFGH$ est un pavé droit : $ABCD$ est la face du bas et E, F, G, H sont au-dessus de A, B, C, D . Dans le repère d'origine A (B sur l'axe des abscisses, D sur l'axe des ordonnées, E sur l'axe des altitudes), on sait seulement que $G(12; 9; 8)$, en centimètres.

- Donne les coordonnées de F et de H .
- Calcule AC , puis la longueur de la grande diagonale $[AG]$ en justifiant l'angle droit utilisé.
- Un point Q de l'arête $[EH]$ vérifie $AQ = 10$ cm. Donne ses coordonnées.
- Calcule le volume du pavé et celui de la pyramide $GABCD$. Quelle fraction du pavé la pyramide occupe-t-elle ?

Exercice 2 – Un cône, un cylindre

(4 pts)

Un cône de révolution a pour rayon 6 cm et pour génératrice 10 cm. Un cylindre a la même base et la même hauteur que ce cône.

- Calcule la hauteur du cône, puis son volume exact.
- Calcule l'angle du secteur de son patron, puis l'aire exacte de sa surface latérale.
- Calcule le volume exact et l'aire latérale exacte du cylindre. Compare avec le cône.
- En prenant 3,14 pour π , donne le volume du cône en cm^3 , puis en cL arrondi à l'unité.

Exercice 3 – Recherche — toutes les boîtes

(4 pts)

Un pavé droit $ABCDEFGH$ est placé dans le repère d'origine A (mêmes conventions qu'à l'exercice 1). Son sommet G a pour coordonnées $(a; b; c)$, où a, b, c sont des nombres entiers de centimètres avec $a \leq b \leq c$. Son volume est 24 cm^3 .

- Montre que a ne peut valoir que 1 ou 2.
- Trouve tous les triplets $(a; b; c)$ possibles et justifie que tu n'en as oublié aucun.
- Calcule l'aire totale de chacun de ces pavés. Lequel utilise le moins de carton ?
- Pour ce pavé, donne les coordonnées de G et du milieu de l'arête $[FG]$.

Exercice 4 – Problème — le silo*(4 pts)*

Un silo à grain est formé d'un cylindre de 8 m de diamètre et de 10 m de hauteur, surmonté d'un toit en forme de cône de même rayon et de 3 m de hauteur. Le toit est fabriqué à partir d'un secteur de tôle.

- Calcule le volume exact du silo.
- Calcule la génératrice du toit et l'angle du secteur de tôle.
- Calcule l'aire exacte de tôle nécessaire pour le toit.
- On ne remplit que la partie cylindrique, avec des camions de 30 m^3 . Sachant que $3,14 < \pi < 3,15$, combien de camions faut-il au minimum ? Justifie.

Exercice 5 – Pour aller plus loin*(4 pts)*

$ABCDEFGH$ est un cube : $ABCD$ est la face du bas et E, F, G, H sont au-dessus de A, B, C, D . On le place dans le repère d'origine A habituel.

- Le cube a pour arête 6 cm et $S(x; y; 6)$ est un point quelconque de la face $EFGH$. Montre que le volume de la pyramide $SABCD$ ne dépend pas de la position de S .
- Généralise : pour un pavé droit de dimensions a, b, c (c étant la hauteur), quelle fraction du pavé occupe une pyramide de base $ABCD$ dont le sommet est sur la face du haut ?
- On découpe un cube d'arête a en trois pyramides de sommet G et de bases $ABCD$, $ABFE$ et $ADHE$; on admet qu'elles remplissent le cube sans se chevaucher. Sans utiliser la formule du volume d'une pyramide, explique pourquoi chacune a pour volume le tiers du cube.
- Un cube de bois de 9 cm d'arête est découpé ainsi. Quel est le volume d'un morceau, en cm^3 puis en cL ?

Bon courage !