

Corrigé et barème – Repérage dans l'espace, patrons, aires et volumes — niveau ★★★

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 4^e

Exercice 1 – Un pavé connu par un seul sommet

(4 pts)

- a) $AB = 12$, $AD = 9$, $AE = 8$. F est au-dessus de B : $F(12; 0; 8)$; H est au-dessus de D : $H(0; 9; 8)$. (0,5 pt) (1)
- b) Triangle ABC rectangle en B : $AC^2 = 144 + 81 = 225$, $AC = 15$ cm. L'arête $[CG]$ est perpendiculaire à la face $ABCD$, donc à la droite (AC) de cette face : ACG est rectangle en C . $AG^2 = 225 + 64 = 289$, $AG = 17$ cm. (0,5 pt AC , 0,5 pt angle droit, 0,5 pt AG) (1)
- c) Q est sur $[EH]$, donc $Q(0; y; 8)$ avec $0 \leq y \leq 9$ et $EQ = y$. $[AE]$ est perpendiculaire à la face du haut, donc AEQ est rectangle en E : $8^2 + y^2 = 10^2$, $y^2 = 36$, $y = 6$. $Q(0; 6; 8)$. (0,5 pt triangle, 0,5 pt coordonnées) (1)
- d) Pavé : $12 \times 9 \times 8 = 864$ cm³. Pyramide (base $ABCD$, hauteur $CG = 8$) : $\frac{108 \times 8}{3} = 288$ cm³. $\frac{288}{864} = \frac{1}{3}$ du pavé. (0,5 pt volumes, 0,5 pt fraction) (1)

Astuce — une grande diagonale de pavé se calcule par deux théorèmes de Pythagore enchaînés : d'abord la diagonale d'une face, puis le triangle debout qui la contient.

Exercice 2 – Un cône, un cylindre

(4 pts)

- a) $h^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64$, $h = 8$ cm. $V = \frac{\pi \times 36 \times 8}{3} = 96\pi$ cm³. (0,5 pt h , 0,5 pt V) (1)
- b) Angle : $\frac{6}{10} \times 360 = 216^\circ$. Le secteur est la même fraction $\frac{216}{360} = \frac{3}{5}$ du disque de rayon 10 : aire $\frac{3}{5} \times \pi \times 10^2 = 60\pi$ cm². (0,5 pt angle, 0,5 pt aire) (1)
- c) Volume : $\pi \times 36 \times 8 = 288\pi$ cm³, soit exactement 3 fois celui du cône. Aire latérale : rectangle de $2\pi \times 6 = 12\pi$ sur 8, soit 96π cm², plus grande que les 60π cm² du cône. (0,5 pt volume, 0,5 pt aire) (1)
- d) $96 \times 3,14 = 288 + 13,44 = 301,44$ cm³ = 0,301 44 L $\approx$ 30 cL. (0,5 pt calcul posé, 0,5 pt conversion) (1)

Méthode — sans calculatrice, garde π jusqu'au bout : 96π est une valeur exacte, et on ne remplace π par 3,14 qu'à la dernière ligne, quand on demande une valeur approchée.

Exercice 3 – Recherche — toutes les boîtes

(4 pts)

- a) Comme $a \leq b \leq c$, on a $a \times a \times a \leq a \times b \times c = 24$. Si $a \geq 3$, alors $a^3 \geq 27 > 24$: impossible. Donc $a = 1$ ou $a = 2$. (1 pt) (1)
- b) Si $a = 1$: $bc = 24$ avec $b \leq c$, donc $b^2 \leq 24$, $b \in \{1; 2; 3; 4\}$: (1; 1; 24), (1; 2; 12), (1; 3; 8), (1; 4; 6). Si $a = 2$: $bc = 12$ avec $2 \leq b \leq c$, donc $b^2 \leq 12$, $b \in \{2; 3\}$: (2; 2; 6), (2; 3; 4). Chaque valeur de b donne un seul c : il y a exactement 6 pavés. (0,5 pt par cas, 0,5 pt justification de l'exhaustivité) (1)
- c) Aire = $2(ab + bc + ac)$: $2(1 + 24 + 24) = 98$; $2(2 + 24 + 12) = 76$; $2(3 + 24 + 8) = 70$; $2(4 + 24 + 6) = 68$; $2(4 + 12 + 12) = 56$; $2(6 + 12 + 8) = 52$ cm². Le pavé $2 \times 3 \times 4$ utilise le moins de carton. (0,5 pt calculs, 0,5 pt conclusion) (1)
- d) $G(2; 3; 4)$ et $F(2; 0; 4)$; milieu de $[FG]$: (2; 1,5; 4). (0,5 pt) (1)

Méthode — pour être sûr de n'oublier aucune solution, on impose un ordre ($a \leq b \leq c$), on borne le plus petit nombre, puis on examine chaque cas un par un.

Exercice 4 – Problème — le silo

(4 pts)

- a) Rayon 4 m. Cylindre : $\pi \times 16 \times 10 = 160\pi$ m³ ; cône : $\frac{\pi \times 16 \times 3}{3} = 16\pi$ m³. Total : 176π m³. (0,5 pt par solide) (1)
- b) $g^2 = 3^2 + 4^2 = 25$, $g = 5$ m. Angle : $\frac{4}{5} \times 360 = 288^\circ$. (0,5 pt g , 0,5 pt angle) (1)
- c) Le secteur représente $\frac{4}{5}$ du disque de rayon 5 m : $\frac{4}{5} \times \pi \times 25 = 20\pi$ m². (0,5 pt) (1)
- d) $160 \times 3,14 = 502,4$ et $160 \times 3,15 = 504$, donc $502,4 < 160\pi < 504$. Or $16 \times 30 = 480 < 502,4$: 16 camions ne suffisent pas ; $17 \times 30 = 510 > 504$: 17 camions suffisent. Il en faut 17. (0,5 pt encadrement, 1 pt conclusion justifiée) (1)

Astuce — encadrer π entre 3,14 et 3,15 permet de conclure sans calculatrice et sans risque : si la conclusion est la même pour les deux bornes, elle est certaine.

Exercice 5 – Pour aller plus loin

(4 pts)

- a) Quelle que soit la position de S sur la face du haut, son altitude vaut 6 : la hauteur de la pyramide est toujours 6 cm. $V = \frac{6^2 \times 6}{3} = \frac{216}{3} = 72$ cm³, sans x ni y . (1 pt) (1)
- b) Base ab , hauteur c : $V = \frac{abc}{3}$, soit toujours $\frac{1}{3}$ du pavé, dont le volume est abc . (1 pt) (1)
- c) Chaque pyramide a pour base un carré de côté a et une arête issue de G perpendiculaire à cette base et de longueur a ($[GC]$ pour $ABCD$, $[GF]$ pour $ABFE$, $[GH]$ pour $ADHE$) : les trois ont la même forme, donc le même volume. Ensemble, elles remplissent le cube : chacune vaut $\frac{a^3}{3}$. (1 pt pour les trois pyramides identiques, 0,5 pt pour la conclusion) (1)
- d) $9^3 = 729$ cm³ ; $729 \div 3 = 243$ cm³ = 0,243 L = 24,3 cL. (0,5 pt) (1)

Erreur fréquente — croire qu'une pyramide penchée a un volume différent d'une pyramide droite : seules comptent l'aire de la base et la hauteur, pas la position du sommet.