

Corrigé et barème – Les cas d'égalité des triangles

Triangles égaux (superposables), éléments homologues, les trois cas d'égalité (trois côtés, un angle entre deux côtés, un côté entre deux angles), démontrer que deux triangles sont égaux puis en déduire des longueurs ou des angles, lien avec les isométries

Durée : 55 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 4^e

Exercice 1 – Éléments homologues

(4 pts)

- De K partent les côtés de 6,4 et 3,8 cm, comme de Q : $K \leftrightarrow Q$; de même $L \leftrightarrow R$ (6,4 et 5,1) et $M \leftrightarrow P$ (5,1 et 3,8). (1)
- $\widehat{Q} = \widehat{K} \approx 53^\circ$ et $\widehat{R} = \widehat{L} \approx 36^\circ$. (1)
- $\widehat{P} = \widehat{M} \approx 180 - 53 - 36 = 91^\circ$. (1)
- Les lettres ne sont pas dans l'ordre des homologues ($KLM = QRP$) : $KL = QR = 6,4$ cm (et $PQ = MK = 3,8$ cm). (1)

Repère — Pour appairer les sommets, on regarde les deux côtés qui partent de chacun : deux sommets homologues sont les extrémités communes de côtés de mêmes longueurs.

Exercice 2 – Égaux ou pas ? Choisir le bon cas

(4 pts)

- 45 mm = 4,5 cm, 0,62 dm = 6,2 cm, 58 mm = 5,8 cm : égaux (trois côtés), $A \leftrightarrow D$, $B \leftrightarrow E$, $C \leftrightarrow F$. (1)
- Pas forcément : $\widehat{G}$ n'est pas compris entre $[GH]$ et $[HI]$; deux triangles différents sont possibles. (1)
- $\widehat{P} = \widehat{T} = 180 - 48 - 67 = 65^\circ$; $[NP]$ et $[ST]$ sont entre des angles égaux : égaux (côté entre deux angles), $M \leftrightarrow R$, $N \leftrightarrow S$, $P \leftrightarrow T$. (1)
- $[UV]$ est entre $\widehat{U}$ et $\widehat{V}$, $[XZ]$ entre $\widehat{X}$ et $\widehat{Z}$: égaux (côté entre deux angles), $U \leftrightarrow X$, $V \leftrightarrow Z$, $W \leftrightarrow Y$. (1)

Attention — Avant de citer un cas, on convertit les longueurs dans la même unité et on vérifie la place de chaque angle sur la figure, sans se fier à l'ordre des lettres.

Exercice 3 – Démontrer puis en déduire

(4 pts)

- Triangles ABN et ACM : $AB = AC$ (isocèle en A), $AN = AM$ (hypothèse), $\widehat{BAN} = \widehat{CAM}$ (c'est le même angle $\widehat{BAC}$). (1)
- Angle compris entre deux côtés égaux : ABN et ACM sont égaux ($A \leftrightarrow A$, $B \leftrightarrow C$, $N \leftrightarrow M$). (1)
- $[BN]$ et $[CM]$ sont homologues : $BN = CM = 7,35$ cm. (1)
- $\widehat{ANB} = 180 - 48 - 23 = 109^\circ$; $\widehat{AMC}$ est son homologue : 109° . (1)

Le point clé — Pour démontrer que deux longueurs sont égales, on les voit comme des côtés homologues de deux triangles que l'on prouve égaux.

Exercice 4 – Vrai ou faux ? Justifier**(4 pts)**

- a) Faux : côtés 3, 4, 5 cm et 4, 4, 4 cm ont le même périmètre (12 cm) sans être égaux. (1)
- b) Faux : côtés de l'angle droit 3 et 4 cm pour l'un, 3 et 6 cm pour l'autre : non superposables. (1)
- c) Vrai : une rotation conserve les longueurs et les angles (isométrie), l'image est superposable. (1)
- d) $\hat{A}$ est entre $[AB]$ et $[AC]$, pas entre $[AB]$ et $[BC]$: ce n'est pas l'angle compris, deux triangles différents sont possibles. (1)

Erreur fréquente — Trois égalités ne suffisent pas toujours : il faut qu'elles correspondent exactement à l'un des trois cas, avec les angles à la bonne place.

Exercice 5 – Problème : les allées du jardin carré**(4 pts)**

- a) $DA = AB = 12$ m (carré), $AE = BF = 4,5$ m (450 cm), $\widehat{DAE} = \widehat{ABF} = 90^\circ$: angle compris, triangles égaux ; $D \leftrightarrow A$, $A \leftrightarrow B$, $E \leftrightarrow F$. (1)
- b) $[AF]$ est l'homologue de $[DE]$: $AF = DE \approx 12,82$ m. (1)
- c) $2 \times 12,82 = 25,64$ m ; $25,64 \times 18,50 = 474,34$ €. (1)
- d) $\widehat{IAE} = \widehat{BAF} = \widehat{ADE}$ (homologues) ; dans DAE , $\widehat{ADE} + \widehat{AED} = 90^\circ$; dans AIE , $\widehat{AIE} = 180 - 90 = 90^\circ$. (1)

À retenir — Des triangles égaux fournissent aussi des angles égaux, qui servent ensuite à démontrer une perpendicularité ou un parallélisme.