

# Triangles semblables

Reconnaître deux triangles de même forme, calculer une longueur avec le coefficient et prévoir l'effet sur l'aire : les triangles semblables généralisent Thalès à toutes les positions.

## 1 Définitions

- **Triangles semblables** : angles deux à deux de même mesure (même forme, taille quelconque).
- **Sommets homologues** : sommets des angles égaux ; **côtés homologues** : côtés opposés aux angles égaux.
- **Coefficient  $k$**  : nombre par lequel on multiplie les côtés du premier pour obtenir ceux du second ;  $k \geq 1$  agrandissement,  $k < 1$  réduction,  $k = 1$  triangles égaux.

## 2 Propriétés

- Deux angles égaux suffisent : le troisième vaut  $180^\circ$  moins les deux autres.
- Semblables  $\Rightarrow$  côtés homologues proportionnels :  $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC} = k$ .
- Réciproque : trois quotients égaux  $\Rightarrow$  triangles semblables.
- Périmètre  $\times k$  ; aire  $\times k^2$  ; pour retrouver  $k$  à partir des aires :  $k = \sqrt{\text{rapport des aires}}$ .

## 3 Méthode : démontrer

1. **Par les angles** : repérer un angle droit, un angle commun, des angles opposés par le sommet, alternes-internes ou correspondants ; en trouver deux égaux.
2. **Par les côtés** : ranger les trois longueurs de chaque triangle du plus petit au plus grand, calculer les trois quotients, vérifier qu'ils sont égaux.
3. Conclure par la phrase « les triangles ... et ... sont semblables », puis écrire les sommets dans l'ordre des homologues.

## 4 Méthode : calculer une longueur

1. Identifier les côtés homologues (angles opposés ou ordre des lettres).
2. Calculer  $k$  avec deux côtés homologues connus.
3. Multiplier par  $k$  (vers le grand) ou diviser par  $k$  (vers le petit).
4. Vérifier : dans un agrandissement, toutes les longueurs augmentent.

## 5 Liens avec le programme

- **Thalès** : AMN et ABC (avec (MN)  $\parallel$  (BC)) sont semblables ; l'égalité des rapports est la proportionnalité des côtés.
- **Homothétie** de rapport  $k$  : image semblable, longueurs  $\times |k|$ , aire  $\times k^2$ .
- Situations classiques : miroir au sol, hauteur issue de l'angle droit d'un triangle rectangle, deux triangles rectangles ayant un angle aigu commun.

## 6 Pièges à éviter

- Comparer des côtés non homologues : toujours petit avec petit, grand avec grand.
- Deux triangles rectangles ne sont pas forcément semblables ; deux triangles rectangles isocèles ou équilatéraux le sont toujours.
- Aire  $\times k$  au lieu de  $\times k^2$ .
- Conclure avec un seul quotient ou un seul angle.

### L'ESSENTIEL

- Deux triangles sont semblables si leurs angles sont deux à deux égaux ; deux angles suffisent.
- Les côtés homologues de triangles semblables sont proportionnels, de coefficient  $k$ .

- Trois quotients de côtés égaux prouvent que deux triangles sont semblables.
- Périmètre multiplié par  $k$ , aire multipliée par  $k^2$ .
- Thalès et l'homothétie sont des cas particuliers de triangles semblables.