

Le théorème de Thalès

L'essentiel sur une page

Calculer une longueur dans une figure « en triangles emboîtés » ou « en papillon », et prouver que deux droites sont parallèles — ou qu'elles ne le sont pas.

1 La configuration

- Deux droites **sécantes en A**, coupées par deux droites **(BC) et (MN)**.
- **Triangles emboîtés** : M sur [AB], N sur [AC].
- **Papillon** : M sur la demi-droite opposée à [AB], N opposée à [AC] — mêmes égalités.
- Toujours commencer par **identifier A**, le sommet commun.

2 Le théorème de Thalès

Si $(MN) \parallel (BC)$, alors :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

- Numérateurs : le **petit** triangle (AMN). Dénominateurs : le **grand** (ABC).
- On part **toujours de A** dans chaque rapport.

3 Méthode : calculer une longueur

1. Citer les hypothèses : « $M \in [AB]$, $N \in [AC]$ et $(MN) \parallel (BC)$ ».
2. « D'après le théorème de Thalès : » écrire l'égalité des trois rapports.
3. Garder les **deux rapports utiles** (celui avec l'inconnue + un rapport complet).
4. Produit en croix, **même unité partout**, puis **valeur exacte** avant l'arrondi.

4 La réciproque : prouver un parallélisme

- Si $M \in [AB]$, $N \in [AC]$, **les points sont dans le même ordre** et $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$, alors $(MN) \parallel (BC)$.
- On calcule **séparément** les deux rapports (fraction irréductible ou décimal exact) puis on compare.
- Rapports **égaux** → parallèles. Rapports **différents** → pas parallèles (contraposée du théorème).
- Astuce : comparer les produits en croix $AM \times AC$ et $AN \times AB$.

5 Pièges à éviter

- Mélanger petit et grand triangle dans un même rapport : $\frac{AM}{AB}$ et non $\frac{AB}{AM}$.
- Utiliser **BM** au lieu de **AB** : $AB = AM + MB$ dans les triangles emboîtés.
- Conclure « parallèles » sans avoir vérifié l'**ordre des points**.
- Oublier que $\frac{MN}{BC}$ ne sert **pas** pour la réciproque.
- Arrondir trop tôt : $2,66 \neq \frac{8}{3}$ quand on compare des rapports.

6 Agrandissement, réduction

- Le triangle AMN est une **réduction** du triangle ABC de rapport $k = \frac{AM}{AB}$ ($k < 1$).
- Les longueurs sont multipliées par k, les **angles conservés**, les aires par k^2 .
- Exemple : $k = 0,5 \rightarrow$ périmètre $\div 2$, aire $\div 4$.

L'ESSENTIEL

- Thalès s'applique quand deux droites parallèles coupent deux droites sécantes en A.
- Les trois rapports partent tous de A : $AM/AB = AN/AC = MN/BC$.
- Pour une longueur : hypothèses → théorème → deux rapports → produit en croix.

- Pour prouver un parallélisme : réciproque, avec les points dans le même ordre.
- Rapports différents → les droites ne sont pas parallèles.
- Rapport k de réduction : longueurs $\times k$, aires $\times k^2$.