Rotation : construire et propriétés

Fiche méthode

(Mathématiques 3e · Espace et géométrie · Transformations)

La démarche pour transformer une figure par une rotation

1. Je repère les trois éléments : le centre, l'angle et le sens (horaire ou anti-horaire).

2. Je construis l'image de chaque point utile : même distance au centre (compas), angle voulu au centre (rapporteur), ou échange des carreaux pour un quart de tour.

3. Je contrôle et je conclus : $OM' = OM$, l'angle au centre est le bon, et les longueurs, angles et aires sont conservés.

Le réflexe — une rotation se décrit par son centre, son angle et son sens ; elle fait tourner la figure sans la déformer ni la retourner.

Cas 1 · Rappels : symétries et translation

Réflexe — retournée → symétrie axiale ; tête en bas → demi-tour (O milieu de $[MM']$) ; même orientation → translation (même déplacement pour tous les points).

Exemple 1. Image de $A(2\,;\,-3)$ par la symétrie de centre O, l'origine du repère.

O est le milieu de $[AA']$: on change le signe des deux coordonnées, $A'(-2\,;\,3)$.

Exemple 2. La translation qui transforme $R(0\,;\,1)$ en $S(-2\,;\,4)$ transforme $T(-4\,;\,2)$ en T'. Coordonnées de T' ?

Déplacement : $-2-0=-2$ et $4-1=3$, soit 2 vers la gauche et 3 vers le haut.

$T'(-4-2\,;\,2+3) = T'(-6\,;\,5)$.

Attention — l'image est le point d'arrivée, l'antécédent le point de départ ; pour un antécédent, on fait le déplacement inverse.

Cas 2 · La rotation : centre, angle et sens

Réflexe — $OM' = OM$ et $\widehat{MOM'}$ = angle de la rotation, dans le sens indiqué ; le triangle OMM' est isocèle en O.

Exemple 1. Quel angle pour un dixième de tour ? À combien de degrés dans le sens anti-horaire correspond une rotation de 25° dans le sens horaire ?

$360 \div 10 = 36^\circ$.

$360 - 25 = 335^\circ$ dans le sens anti-horaire.

Exemple 2. Rotation de centre O d'angle 60°, $OM = 4{,}4$ cm. Que vaut MM' ?

$OM' = OM$ et $\widehat{MOM'} = 60^\circ$: le triangle OMM' est équilatéral.

$MM' = 4{,}4$ cm.

Attention — le sens compte (sauf pour 180°) ; l'angle se mesure au centre O, pas en M.

Cas 3 · Construire l'image d'un point, d'une figure

Réflexe — rapporteur centré sur O dans le bon sens, compas de rayon OM ; sur quadrillage, un quart de tour échange

les deux nombres de carreaux.

Exemple 1. De O à B : 2 carreaux à droite et 3 en bas. Où est B', image de B par le quart de tour de centre O dans le sens horaire ?

Les nombres s'échangent : de O à B', 3 carreaux à gauche et 2 en bas.
Contrôle : l'angle $\widehat{BOB'}$ est droit et $OB' = OB$.

Exemple 2. Image de $Q(-1\,;\,4)$ par le quart de tour anti-horaire de centre O, l'origine.

$(x\,;\,y) \mapsto (-y\,;\,x) : Q'(-4\,;\,-1)$.

Attention — un quart de tour n'est pas une symétrie : les deux nombres de carreaux s'échangent.

Cas 4 · Utiliser les propriétés conservées

Réflexe — « On sait que … est l'image de … par une rotation. Or une rotation conserve … Donc … ».

Exemple 1. $A'B'C'$ est l'image de ABC par une rotation, $AC = 5{,}3$ cm et $\widehat{ACB} = 35^\circ$. Que valent $A'C'$ et $\widehat{A'C'B'}$?

Une rotation conserve les longueurs et les angles : $A'C' = 5{,}3$ cm et $\widehat{A'C'B'} = 35^\circ$.

Exemple 2. Rotation de centre O d'angle 100° : angles $\widehat{OMM'}$ et $\widehat{OM'M}$?

OMM' est isocèle en O : $(180 - 100) \div 2 = 40^\circ$ chacun.

Attention — $MM' = OM$ seulement pour une rotation de 60° ; pour un quart de tour, on utilise le théorème de Pythagore.

Cas 5 · Rosaces, pavages : quelle transformation ?

Réflexe — rosace de n motifs : $360^\circ \div n$; retour à la place quand le total est un multiple de 360° ; décalé, tourné, retourné ou tête en bas ?

Exemple 1. Angle d'une rosace de 20 motifs ?

$360 \div 20 = 18^\circ$.

Exemple 2. Un motif tourne de 140° à chaque fois. Après combien de rotations revient-il à sa place ?

On cherche le premier multiple de 140 qui est un multiple de 360 : $140 \times 18 = 2\,520 = 7 \times 360$ (aucun nombre plus petit ne convient).
Après 18 rotations.

Attention — du motif ① au motif ⑤, il y a 4 rotations ; « tourné » n'est pas « retourné ».

Les pièges

- Oublier le sens : 90° dans le sens horaire et 90° dans le sens anti-horaire ne donnent pas la même image.
- Mesurer l'angle en M : l'angle de la rotation est l'angle $\widehat{MOM'}$, de sommet O.
- Sur un quadrillage, garder les nombres de carreaux sans les échanger : on obtient une symétrie, pas un quart de tour.
- Croire que $MM' = OM$ pour toute rotation : c'est vrai seulement pour 60°.
- Confondre une figure tournée et une figure retournée : une rotation ne fait jamais l'effet d'un miroir.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).