Corrigé et barème – Rotation : construire et propriétés

Rappels de 6e, 5e et 4e (symétrie axiale, demi-tour, translation, image et antécédent), rotation de centre O, d'angle et de sens donnés (OM′ = OM, angle au centre, quart de tour, demi-tour), construire l'image d'un point et d'une figure au rapporteur et au compas, sur quadrillage et dans un repère, propriétés conservées et calculs dans le triangle OMM′, rosaces, pavages et reconnaissance des transformations.

Durée : 55 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 3e

Exercice 1 – Rappels : symétries et translation ★★ *(4 pts)*

a) O est le milieu de $[AA']$: $A'(2\,;\,-3)$ (1)

b) Déplacement de A à B : $4-(-2)=6$ et $1-3=-2$. $D(1+6\,;\,-2-2)=D(7\,;\,-4)$ (1)

c) D est l'image de C par la translation qui transforme A en B, et C n'est pas sur (AB) : $ABDC$ est un parallélogramme ($[CD]$ est parallèle à $[AB]$ et de même longueur) (1)

d) Tête en bas sans effet miroir : un demi-tour (symétrie centrale). Retournée comme dans un miroir : une symétrie axiale (1)

Méthode — Demi-tour : on change les deux signes ; translation : on ajoute le même déplacement à chaque point.

Exercice 2 – Rotations et triangles ★★ *(4 pts)*

a) Un centre, un angle et un sens (horaire ou anti-horaire) (1)

b) $OM'=OM$ et $\widehat{MOM'}=60^\circ$: le triangle est isocèle en O avec un angle de 60°, ses deux autres angles mesurent $(180-60)\div 2=60^\circ$. Il est équilatéral : $MM'=4{,}5$ cm (1)

c) $OP=OM$ et $\widehat{MOP}=90^\circ$: triangle rectangle isocèle en O. Pythagore : $MP^2=4{,}5^2+4{,}5^2=40{,}5$, donc $MP=\sqrt{40{,}5}\approx 6{,}4$ cm (1)

d) Demi-tour : $(3{,}5\,;\,-2)$. Quart de tour anti-horaire, $(x\,;\,y)\mapsto(-y\,;\,x)$: $(-2\,;\,-3{,}5)$ (1)

Repère — Le triangle OMM' est toujours isocèle en O ; il est équilatéral pour 60° et rectangle isocèle pour 90°.

Exercice 3 – Construire l'image par une rotation ★★ *(4 pts)*

a) Dans le sens horaire, « a à droite, b en haut » devient « b à droite, a en bas ». E (2 à droite, 1 en haut) donne E' : 1 à droite, 2 en bas ; F (4 à droite, 1 en haut) donne F' : 1 à droite, 4 en bas ; G (4 à droite, 4 en haut) donne G' : 4 à droite, 4 en bas. On relie E', F', G' (1)

b) Une rotation conserve les longueurs et les angles : $E'F'G'$ est rectangle en F', avec $E'F'=2$ carreaux et $F'G'=3$ carreaux. Il est superposable à EFG (1)

c) ① Je trace $[OR]$. ② Rapporteur centré sur O, zéro sur $[OR)$: je compte 70° dans le sens inverse des aiguilles d'une montre et je trace la demi-droite. ③ Compas, pointe sur O, écartement $OR=5$ cm : je reporte R' sur cette demi-droite. Contrôle : $OR'=5$ cm (1)

d) $OR'=OR=5$ cm : le triangle ORR' est isocèle en O, avec $\widehat{ROR'}=70^\circ$. Ses deux autres angles sont égaux : $\widehat{ORR'}=(180-70)\div 2=55^\circ$ (1)

Méthode — Sur quadrillage, un quart de tour échange les deux nombres de carreaux ; sur feuille blanche, on enchaîne segment, rapporteur et compas.

Exercice 4 – Vrai ou faux ? ★★ *(4 pts)*

a) Vrai : un demi-tour autour de O place M' à l'opposé de M, avec $OM' = OM$; O est le milieu de $[MM']$ (1)

b) Faux : une rotation fait tourner la figure sans la retourner ; seule une symétrie axiale fait l'effet d'un miroir (1)

c) Vrai : une rotation conserve les longueurs (le rayon) et l'image du centre est le centre de l'image (1)

d) Faux : c'est vrai seulement pour un angle de $60°$. Pour un quart de tour, $MM'^2 = OM^2 + OM^2$, donc MM' est plus grand que OM (1)

Le point clé — Une rotation conserve toutes les mesures ; elle change la position et l'orientation, jamais le « sens de lecture » de la figure.

Exercice 5 – Rosaces et pavages ★★★ *(4 pts)*

a) $360 \div 8 = 45°$ (1)

b) Du motif ③ au motif ⑦ : $7 - 3 = 4$ rotations, soit $4 \times 45 = 180°$. C'est un demi-tour, la symétrie de centre O (1)

c) Il faut que $150 \times n$ soit un multiple de 360. $150 \times 12 = 1\,800 = 5 \times 360$, et aucun n plus petit ne convient (150, 300, 450, 600, 750, 900, $1\,050$, $1\,200$, $1\,350$, $1\,500$ et $1\,650$ ne sont pas des multiples de 360) : 12 rotations (1)

d) $2 \times 150 + 60 = 360°$: les trois angles remplissent exactement le tour du sommet. $3 \times 150 = 450°$ dépasse $360°$: trois dodécagones se chevaucheraient (1)

Méthode — Une rosace de n motifs tourne de $360^\circ \div n$; un motif revient à sa place quand l'angle total est un multiple de 360°.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).