

Homothétie & agrandissement-réduction

Transformer une figure en une figure de même forme, plus grande ou plus petite, et prévoir l'effet sur les longueurs, les aires et les volumes.

1 Définitions

- **Homothétie** de centre O et de rapport k : M' est sur (OM), $\overrightarrow{OM'} = |k| \times \overrightarrow{OM}$; même côté que M si $k > 0$, de l'autre côté si $k < 0$.
- **Agrandissement** : $k > 1$. **Réduction** : $0 < k < 1$. $k = 1$: figure identique.
- Le centre O est le seul point fixe ; O, M, M' sont alignés.
- **Échelle** 1/n : réduction de rapport 1/n (1 cm sur le plan = n cm en vrai).

2 Propriétés

- **Conservés** : angles, alignement, parallélisme, milieux, nature des figures.
- **Pas conservées** : les longueurs (sauf $|k| = 1$).
- L'image d'une droite est une droite parallèle ; l'image d'un cercle est un cercle.
- Lien Thalès : AMN est l'image de ABC par l'homothétie de centre A et de rapport AM/AB.

3 Les trois coefficients

Grandeur	Multipliée par
Longueur, périmètre	k
Aire	k^2
Volume, masse (même matériau)	k^3

Exemple $k = 2$: longueurs $\times 2$, aires $\times 4$, volumes $\times 8$.

Avec $k = 1/2$: volumes $\div 8$.

4 Méthode : retrouver k

1. Deux longueurs : $k = \text{image} \div \text{départ}$ (même unité).
2. Deux aires : $k^2 = \text{rapport des aires}$, puis racine carrée.
3. Deux volumes : $k^3 = \text{rapport des volumes}$, puis chercher le nombre dont le cube vaut ce rapport ($8 \rightarrow 2$; $27 \rightarrow 3$; $3,375 \rightarrow 1,5$).
4. Puis en déduire les autres grandeurs avec k, k^2 , k^3 .

5 Pièges à éviter

- Multiplier une aire par k au lieu de k^2 (avec $k = 3$, l'aire est $\times 9$).
- Diviser un volume par 2 avec $k = 1/2$: il est divisé par 8.
- Confondre $OM' = k \times OM$ et MM' ($MM' = OM' - OM$ si $k > 1$).
- Calculer une échelle avec des unités différentes (7 m et 3,5 cm $\rightarrow 700$ et 3,5).
- Oublier que $k < 0$ retourne la figure mais garde $|k|$ pour les longueurs.

L'ESSENTIEL

- Homothétie : centre O, rapport k, $\overrightarrow{OM'} = |k| \times \overrightarrow{OM}$, points O, M, M' alignés.
- Agrandissement si $k > 1$, réduction si $0 < k < 1$; angles et forme conservés, longueurs non.
- Longueurs $\times k$, aires $\times k^2$, volumes $\times k^3$.

- Pour retrouver k : longueurs (quotient), aires (racine carrée), volumes (racine cubique).
- Échelle 1/n = réduction de rapport 1/n ; même unité avant tout calcul.