# Équations : produit nul et $x^2 = a$

Fiche méthode

(Mathématiques 3e · Nombres et calculs · Calcul littéral et équations)

## La démarche pour résoudre une équation qui contient $x^2$

**1. J'isole ou je ramène à 0.** Si $x$ n'apparaît que dans $x^2$, j'isole $x^2$. Sinon, je ramène tous les termes dans un membre : « $\ldots = 0$ ».

**2. Je reconnais la forme.** $x^2 = a$ : racine carrée. Produit $= 0$ : produit nul. Somme $= 0$ : je factorise d'abord (facteur commun, puis $a^2 - b^2$).

**3. Je conclus** avec toutes les solutions, et je vérifie au moins l'une d'elles dans l'équation de départ.

**Le réflexe —** un produit est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul ; $x^2 = a$ a deux solutions si $a > 0$, une si $a = 0$, aucune si $a < 0$ ; on ne divise jamais par $x$.

## Cas 1 · Carré et racine carrée (rappels de 4e)

**Réflexe —** $\sqrt{a}$ est le nombre positif dont le carré vaut $a$ ; pour encadrer, je place $a$ entre deux carrés parfaits consécutifs.

**Exemple.** Calculer $\sqrt{12{,}25}$ et encadrer $\sqrt{75}$ entre deux entiers consécutifs.

$3{,}5 \times 3{,}5 = 12{,}25$ et $3{,}5$ est positif : $\sqrt{12{,}25} = 3{,}5$.
$64 < 75 < 81$, c'est-à-dire $8^2 < 75 < 9^2$ : $8 < \sqrt{75} < 9$.

**Attention —** $\sqrt{a}$ n'est pas la moitié de $a$, et $-3^2 = -9$ alors que $(-3)^2 = 9$.

## Cas 2 · Résoudre une équation produit nul

**Réflexe —** un produit est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul : j'écris « $\ldots = 0$ ou $\ldots = 0$ » et je résous chaque équation.

**Exemple.** Résoudre $(2x + 9)(x - 4) = 0$.

$2x + 9 = 0$ ou $x - 4 = 0$, donc $2x = -9$ ou $x = 4$.
Les solutions sont $-4{,}5$ et $4$.

**Attention —** la propriété ne s'applique qu'avec « $= 0$ » ; on écrit « ou », et on ne développe pas.

## Cas 3 · Factoriser pour se ramener à un produit nul

**Réflexe —** je ramène tout à « $= 0$ », je factorise (facteur commun, sinon $a^2 - b^2$), puis j'applique le produit nul.

**Exemple 1.** Résoudre $6x^2 = 15x$.

$6x^2 - 15x = 0$, donc $3x(2x - 5) = 0$.
$3x = 0$ ou $2x - 5 = 0$ : les solutions sont $0$ et $2{,}5$.

**Exemple 2.** Résoudre $100x^2 - 9 = 0$.

$(10x)^2 - 3^2 = 0$, donc $(10x + 3)(10x - 3) = 0$.
$10x = -3$ ou $10x = 3$ : les solutions sont $-0{,}3$ et $0{,}3$.

**Attention —** diviser par $x$ fait perdre la solution $0$.

## Cas 4 · Résoudre $x^2 = a$

**Réflexe —** j'isole $x^2$ ; si $a > 0$ : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$ ; si $a = 0$ : 0 ; si $a < 0$ : aucune solution.

**Exemple.** Résoudre $x^2 = 3{,}24$, puis $2x^2 + 128 = 0$.

$3{,}24 > 0$ et $1{,}8 \times 1{,}8 = 3{,}24$ : les solutions sont $1{,}8$ et $-1{,}8$.
$2x^2 = -128$, donc $x^2 = -64$ : un carré n'est jamais négatif, aucune solution.

**Attention —** dans un problème de longueur, je garde la solution positive en le disant.

### Les pièges

- Écrire $\sqrt{100} = 50$ : la racine carrée n'est pas la moitié ; $\sqrt{100} = 10$.
- Appliquer le produit nul à $(x - 5)(x - 1) = 3$ : il faut un produit égal à 0.
- Diviser $x^2 = 7x$ par $x$ : on trouve 7, mais on perd la solution 0.
- Donner seulement 5 pour $x^2 = 25$ : $-5$ est aussi solution.
- Proposer $-4$ pour $x^2 = -16$ : $(-4)^2 = 16$ ; un carré n'est jamais négatif.

*Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).*